Dialogues Aumanniens

Christina Pawlowitsch

Université Panthéon-Assas, Paris II

christina.pawlowitsch@u-paris2.fr

Octobre 2020

Sylvia K. Kummer, détail de « walk two moons » 2005.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

D'après le philosophe David Lewis (1969), un événement est de *connaissance commune* (*common knowledge*) entre deux individus si les deux individus ont connaissance de cet événement et si par ailleurs les deux savent que l'autre le sait, et les deux savent que l'autre sait qu'ils le savent tous les deux, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

Robert Aumann (1976) s'est servi du langage des ensembles pour fournir un modèle mathématique de ce qu'un individu sait qui permet de donner une définition de la connaissance commune qui *ne repose pas sur un tel recours infini.*

Plus précisément Aumann s'est servi du concept d'une *partition* de l'ensemble de tous les états du monde possibles Ω pour décrire l'information sur le vrai état du monde (l'état du monde réalisé) que possède un individu. Selon le modèle d'Aumann, à l'état du monde réalisé $\omega^* \in \Omega$, un individu caractérisé par la partition d'information $\mathscr{P}$ va seulement savoir que l'un des états du monde appartenant à la même cellule de la partition que ω^* s'est réalisé. Par exemple, si l'ensemble de tous les états du monde possibles est

$$\Omega = \{a, b, c, d\}$$

et la partition d'information d'un individu est donnée par

$$\mathscr{P} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\},$$

alors :

- si a se réalise, l'individu va seulement savoir que a ou b s'est réalisé,
- si b se réalise, l'individu va seulement savoir que a ou b s'est réalisé,
- si c se réalise, l'individu va seulement savoir que c ou d s'est réalisé,
- si d se réalise, l'individu va seulement savoir que c ou d s'est réalisé.

Cela ne veut cependant pas dire que l'individu en question n'aurait pas connaissance de certains *faits* concernant l'état du monde, de certains *événements*, comme disent les probabilistes. Bien évidemment, si la cellule de la partition à laquelle appartient le vrai état du monde est incluse dans un événement $A \subset \Omega$, alors l'individu saura que l'événement

A s'est réalisé. Dans l'exemple ci-dessus, si a se réalise, l'individu saura, entre autres, que l'événement $A = \{a, b, c\}$ s'est réalisé, puisque $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$. Pour en donner une illustration plus concrète, imaginons que l'ensemble fondamental $\Omega = \{a, b, c, d\}$ correspond à des accents différents : a un accent new-yorkais, b un accent bostonien, c un accent du sud des Etats-Unis, d un accent britannique. Certainement, si un individu entend un accent dont elle sait seulement qu'il s'agit d'un accent new-yorkais ou bostonien (mais ne peut pas distinguer entre les deux), elle saura toutefois qu'il s'agit d'un accent américain (et non d'un accent britannique).

Etant donné une loi de probabilité *a priori* sur Ω et l'information apportée par sa partition d'information, un individu – pourvu qu'il ou elle est rationnel dans le sens bayésien – peut bien sûr déterminer la probabilité *a posteriori* de tout événement $A \subset \Omega$.

Aumann (1976) a démontré le résultat suivant : si deux individus imputent la même loi de probabilité a priori sur l'ensemble fondamental Ω et si, après la réalisation du vrai état du monde (grâce à la connaissance commune de leurs partitions d'information), il est de connaissance commune entre les deux que l'individu 1 attribue à un événement A une probabilité a posteriori de q_1 et que l'individu 2 attribue à A une probabilité a posteriori de q_2, alors $q_1 = q_2$. (Nous détaillerons ce résultat dans le chapitre 2.)

En économie, théorie des jeux et théorie de la décision, on appelle la probabilité attribuée à un événement aussi une *croyance* (a *belief*). Dans ce sens-là, si $q_1 = q = q_2$, les deux individus auront alors une *croyance commune* par rapport à l'événement A ; c'est-à-dire une probabilité qu'ils attribueront en connaissance commune à l'événement A.

Le résultat d'Aumann – et ceci déroute facilement – décrit un *cas statique*. Il ne porte pas, par exemple, sur un scénario de communication dans lequel les croyances a posteriori des individus soient rendues de connaissance commune par un acte de parole. Le résultat d'Aumann décrit le cas particulier que les croyances a posteriori des individus sont de connaissance commune, automatiquement, si l'on veut, *grâce à la connaissance commune des partitions d'information* ainsi que de la loi de probabilité a priori qui règne sur l'ensemble fondamental. Mais certainement ce sont des conditions particulières, et souvent elle ne sont pas réunies.

Voici un exemple : soit l'ensemble des états du monde possibles $\Omega = \{a, b, c, d\}$, doté de la loi uniforme. En outre soient un individu i avec la partition d'information $\mathscr{P}_i = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ et un autre individu j avec la partition d'information $\mathscr{P}_j = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$. Supposons que c'est l'événement $A = \{b, d\}$ qui intéresse et que l'état a se réalise. A l'état a, l'individu i sait seulement que le vrai état appartient à $\{a, b\}$, alors que l'individu j sait que a s'est réalisé. L'individu i va alors attribuer à l'événement $A = \{b, d\}$ une probabilité a posteriori de $1/2$ et l'individu j de 0. L'individu j, ayant connaissance de la partition d'information de i, va savoir que i attribue à A une probabilité de $1/2$; mais inversement, i ne saura pas si j attribue à A une probabilité de 0 ou $1/2$ (puisque si l'état réalisé était b, ce que l'individu i ne peut pas rejeter, l'individu j aurait reçu l'information que le vrai état du monde était

b ou c et l'individu j attribuerait alors à l'événement $A = \{b, d\}$ une probabilité de $1/2$). Dans cet exemple, la connaissance commune par rapport aux probabilités a posteriori de l'événement A se heurte alors déjà au premier niveau du croisement des connaissances.

Et pourtant le théorème d'Aumann invite à un scénario dynamique. Imaginons que les croyances a posteriori de deux individus ne sont pas de connaissance commune grâce à la connaissance commune de leurs partitions d'information mais que les deux individus se communiquent tour à tour leurs croyances a posteriori. Bien évidemment, si les deux individus sont rationnels et connaissent la partition d'information de l'autre, ces annonces vont leur permettre, tour à tour, de tirer certaines conclusions par rapport à ce qui peut et ce qui ne peut pas être l'état du monde réalisé – et cette information va éventuellement leur permettre d'actualiser leurs croyances a posteriori au delà de l'information que chacun d'eux a reçue selon sa partition d'information individuelle. Aumann (1976), vers la fin de son article, songe à un tel scénario, et il anticipe que celui-ci devrait toujours se terminer avec les conditions identifiées par son résultat : une situation dans laquelle les probabilités a posteriori seront de connaissance commune et alors égales.

John Geanakoplos et Herakles Polemarchakis (1982) ont étudié plus généralement un tel processus de communication par lequel les individus se communiquent tour à tour leurs croyances – un dialogue à travers les croyances, si l'on veut. L'étude montre qu'à chaque étape d'un tel processus, les individus peuvent écarter de plus en plus d'états dont il est devenu de connaissance commune qu'ils ne peuvent pas être l'état réalisé jusqu'à ce qu'ils arrivent, comme Aumann l'anticipe, à une probabilité actualisée jointe qu'ils attribueront alors en connaissance commune à l'événement A – jusqu'à ce qu'ils arrivent en un mot à une « situation Aumannienne ».

Un tel modèle dynamique permets d'étudier, de manière formelle, des questions variées :

— Est-ce qu'un tel processus de communication indirecte à travers les probabilités actualisées conduit à la même croyance commune que la communication directe de l'information que chacun des individus a reçue selon sa partition d'information ?
— Si tout le monde est rationnel – ce que l'on suppose – peut-il arriver que les participants d'un tel dialogue répètent chacun de son côté plusieurs fois la même croyance a posteriori ? Et si oui, qu'est-ce que cela veut dire ? Qu'il ne se passe plus rien, que les individus n'apprennent plus rien sur l'état du monde ?
— Le résultat d'un tel processus de communication indirecte dépend-il de l'ordre ?
— Si on injecte de l'information de l'extérieur, par exemple, par une annonce publique, cela peut-il faire converger le processus vers un autre résultat ?
— La trace visible d'un tel échange, c'est-à-dire, la liste des croyances échangées, aura-t-elle certaines régularités ou peut n'importe quelle liste de croyances bien provenir d'un dialogue bayésien ?
— Si les individus ne se communiquent pas explicitement leur croyances, mais sont tout de même capables d'observer certaines actions de l'autre (dont l'opportunité dépend de leurs croyances), un tel scénario, va-t-il aussi faire émerger une croyance

commune ?

Ces questions, et bien d'autres, ont été abordées par des économistes, théoriciens de jeux et théoriciens de la décision.

Au delà des dialogues, l'étude d'Aumann (1976) a inspirée des recherches multiples et variées. Une partie importante de ces travaux porte sur un fondement du modèle des connaissances basé sur les partitions d'information comme employé par Aumann : Paul Milgrom (1981) propose un fondement axiomatique de la définition formelle de la connaissance commune, comme elle paraît à travers le modèle d'Aumann, en définissant un opérateur de connaissance commune auquel il impose certaines propriétés. Bacherach (1985) définit un opérateur de connaissance au niveau des individus et réédifie ainsi la théorie Aumannienne. Dov Samet (1990), de manière encore plus fondamentale, propose un fondement des modèles reposant sur un ensemble des états du mondes possibles, des modèles *sémantique*, si on veut, en caractérisant un état du monde par toutes les phrases (toutes les propositions) qui sont vraies à cet état du monde. En informatique, Ronald Fagin, Joseph Halpern, Yoram Moses et Moshe Vardi (1995 [1988]), et en philosophie et économie, Luc Lismont et Philippe Mogin (1994) relient les modèles sémantiques, comme ils ont jusque-là été employés par les auteurs dans la tradition Aumanienne, à des approches syntactiques reposant sur un langage propositionnel modale comme elles ont été développées en logique épistémique notamment depuis Hintikka (1962). Aumann lui-même a étendu ses recherches dans cette direction (Aumann 1999a et 1999b ; voir aussi Aumann et Heifetz 2002).

D'autre part, ces travaux portent sur des extensions et des applications du résultat d'Aumann. Une question qui, dans ce contexte, a suscité beaucoup d'intérêt est celle d'une « presque connaissance commune », question abordée, entre autres, par Monderer et Samet (1989), Rubinstein (1989), Morris et Shin (1997), Morris (1999).

Au centre du présent traité est le résultat d'Aumann (1976) lui-même, dans sa version originale, c'est-à-dire, exprimé dans le langage des partitions d'information. Les termes de base de cette théorie seront développés de manière détaillée, accompagnés par de nombreux exemples. D'autre part, nous allons suivre le fil de l'une des extensions du modèle Aumannien : les dialogues à travers un échanges des probabilités.

L'étude des dialogues – même s'il s'agit des dialogues un peu particulier, qui consiste à ce que deux individus se crient tour à tour des probabilités – touche forcement à des questions liées au langage et la parole. Ce texte se referme alors avec un chapitre dans lequel j'essaye de dessiner quelques connections possibles entre l'étude des « dialogues bayésiens » – les dialogues comme étudiés dans le modèle des connaissances établie par Aumann – et certaines idées, et concepts, dans la philosophie du langage.

Ce texte est premièrement la présentation et la mise en perspective des idées déjà existantes. A quelques endroits on trouvera des réflexions ou observations éventuellement nouvelles, comme, par exemple, l'interprétation du théorème d'Aumann en termes d'une *indépendance* *en probabilité* (2.5), une définition plus étroite de l'algorithme du processus de communication indirecte à travers les probabilités actualisées comme donnée par Geanakoplos et Polemarchakis (4.1), ou encore, en lien avec ce dernier point, un rapprochement entre un objet qui apparaît à travers ce processus, et que nous appelons ici « le fond de la connaissance commune », et le concept du « fond commun »(« common ground ») comme il est employé dans la philosophie du langage.

Chapitre 2

Le cadre formel et le théorème d'Aumann

Soient Ω l'ensemble fondamental épuisant tous les états du monde qui peuvent en principe se réaliser, $\mathscr{B}$ une σ-algèbre sur Ω, et p une loi de probabilité définie sur $(\Omega, \mathscr{B})$. On note $\omega \in \Omega$ pour un état du monde quelconque. En outre, soient deux individus, 1 et 2. Ces deux individus attribuent la même probabilité a priori, donnée par p, aux événements appartenant à $\mathscr{B}$, mais n'ont pas accès à la même information quant à l'état réalisé $\omega^\star \in \Omega$.

L'accès à l'information d'un individu par rapport à l'état réalisé est modélisé par une *partition finie* de Ω, c'est-à-dire, un ensemble fini

$$\mathscr{P}_i = \{P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{ik}, \ldots, P_{iK_i}\}$$

de parties (sous-ensembles) non-vides P_{ik} de Ω tel que :

(a) tout couple $(P_{ik}, P_{ik'})$, $k \neq k'$, est disjoint et

(b) $\bigcup_k P_{ik} = \Omega$.

On appelle les P_{ik} les *classes* (ou les *cellules*) de la partition $\mathscr{P}_i$. On suppose que toutes les classes P_{ik} de la partition $\mathscr{P}_i$ appartiennent à la σ-algèbre $\mathscr{B}$ définie sur Ω, ce qui garantit qu'elles sont probabilisées par la probabilité p définie sur $(\Omega, \mathscr{B})$. On note $P_i(\omega)$ la classe de la partition $\mathscr{P}_i$ à laquelle appartient ω. En d'autres termes, $P_i(\cdot) : \Omega \to \mathscr{P}_i$ est une application associant à chaque état du monde la classe de la partition $\mathscr{P}_i$ à laquelle il appartient. [1]

Par exemple, si $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathscr{P}_1 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\mathscr{P}_2 = \{\{a, c, d\}, \{b\}\}$, et $\omega^\star = a$ se réalise, alors $P_1(a) = \{a, b\}$, et $P_2(a) = \{a, c, d\}$.

Les partitions $\mathscr{P}_i$ sont des *partitions d'information* dans le sens suivant : si $\omega^\star$ se réalise, l'individu i reçoit l'information que l'état réalisé appartient à $P_i(\omega^\star)$, c'est-à-dire que l'état réalisé est l'un des états appartenant à $P_i(\omega^\star)$. Dans ce sens-là, on appelle les classes P_{ik} de la partition $\mathscr{P}_i$ aussi les *ensembles d'information* de i. Dans l'exemple ci-dessous : si

1. Pour plus sur les partitions finies voir, par exemple, Barbut (1968).

a se réalise, l'individu 1 va alors savoir que l'état réalisé est soit a, soit b ; et l'individu 2 va savoir que l'état réalisé est soit a, soit c, soit d. Aumann part de l'hypothèse que la probabilité a priori p définie sur $(\Omega, \mathscr{B})$ ainsi que les partitions d'information des deux individus, $\mathscr{P}_i$, $i \in I = \{1, 2\}$, sont de *connaissance commune* entre les deux individus.

Que sont les événements dont un individu caractérisé par la partition $\mathscr{P}_i$ a connaissance ? Dans le langage probabiliste, un *événement* A est tout simplement un sous-ensemble de l'ensemble fondamental, $A \subset \Omega$. Si l'état $\omega^\star$ se réalise et $P_i(\omega^\star) \subset A$, c'est-à-dire, si $P_i(\omega^\star)$ *implique* A, bien évidemment, l'individu i *sait* qu'à l'état réalisé, l'événement A s'est réalisé. Si en revanche $P_i(\omega^\star) \cap A = \emptyset$, ce qui veut dire que l'événement A et $P_i(\omega^\star)$ s'excluent, l'individu i sait qu'à l'état réalisé, l'événement A ne s'est sûrement pas réalisé.

Il se peut, cependant, qu'un individu s'intéresse à un événement $A \subset \Omega$ qui ni inclut ni exclut $P_i(\omega^\star)$, mais qui a une intersection non nulle et différente de lui même avec A. Dans ce cas-là, en supposant que A est probabilisable par rapport à la σ-algèbre sur Ω, l'individu peut toutefois calculer la *probabilité conditionnelle de A sachant que l'état réalisé appartient à $P_i(\omega^\star)$* :

$$q_i = p(A \mid P_i(\omega^\star)) = \frac{p(A \cap P_i(\omega^\star))}{p(P_i(\omega^\star))}.$$

C'est *la probabilité a posteriori* de A étant donné l'information apportée par la partition d'information $\mathscr{P}_i$.

Bien évidemment, si, à l'état $\omega^\star$, l'individu i *sait* que A s'est réalisé, c'est-à-dire $P_i(\omega^\star) \subset A$, alors

$$q_i = p(A \mid P_i(\omega^\star)) = \frac{p(A \cap P_i(\omega^\star))}{p(P_i(\omega^\star))} = \frac{p(P_i(\omega^\star))}{p(P_i(\omega^\star))} = 1.$$

Et si l'individu i sait que A ne s'est sûrement pas réalisé, c'est-à-dire $P_i(\omega^\star) \cap A = \emptyset$, alors

$$q_i = p(A \mid P_i(\omega^\star)) = \frac{p(A \cap P_i(\omega^\star))}{p(P_i(\omega^\star))} = \frac{p(\emptyset)}{p(P_i(\omega^\star))} = 0.$$

Quant à l'interprétation, une subtilité doit être retenue dès l'abord : la classe de la partition à laquelle appartient le vrai état du monde, $p(A \mid P_i(\omega^\star))$, est bien sûr pour nous, les analystes du modèle, une fonction de $\omega^\star$. Mais cela ne veut pas dire que l'individu i connaisse $\omega^\star$! Justement, l'individu ne connaît pas $\omega^\star$ mais seulement $P_i(\omega^\star)$. Or, connaissance de $P_i(\omega^\star)$ suffit pour calculer $p(A \mid P_i(\omega^\star))$. Pour le dire autrement : l'individu i, à l'état $\omega^\star$, connaît l'image de $\omega^\star$ par l'application P_i : $P_i(\omega^\star)$; mais confronté à $P_i(\omega^\star)$, c'est-à-dire la cellule de la partition $\mathscr{P}_i$ qui lui est désignée par l'application P_i, l'individu ne connaît pas son antécédent.

On appelle la probabilité attribuée à un événement aussi une *croyance*. Dans cette terminologie-là, $p(A)$ est alors la *croyance a priori* de A – qui par l'hypothèse est de connaissance commune entre les deux individus – et $p(A \mid P_i(\omega^\star))$ la *croyance a posteriori* de A de l'individu i étant donné l'information apportée par sa partition d'information.

2.1 La connaissance commune

On cherche à modéliser *le croisement des croyances* des individus. Dans ce but – et c'est l'une des contributions d'Aumann – il se trouve utile de retenir la notion de la *partition fondue* de deux partitions.

Définition 1 Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux partitions finies de l'ensemble fondamental Ω. On appelle la *partition fondue* (en anglais : « the *meet* ») de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, et l'on note par $\hat{\mathscr{P}} = \mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$, le *grossissement commun le plus fin* de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$; c'est-à-dire la partition de Ω la plus fine [2] telle que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$P_i(\omega) \subset \hat{P}(\omega), \quad \forall i \in I = \{1, 2\},$$

sachant que $\hat{P}(\omega) = P_1 \wedge P_2(\omega)$, est la classe de la partition fondue $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$ à laquelle appartient ω.

En pratique, $\hat{\mathscr{P}} = \mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$ s'obtient par fermeture transitive (itération répétée) de l'opération qui consiste à faire correspondre à chaque élément ω de Ω – c'est-à-dire rassembler dans la même classe de $\hat{\mathscr{P}}$ – tous les autres éléments de Ω qui sont dans la même classe que ω soit dans $\mathscr{P}_1$, soit dans $\mathscr{P}_2$. [3]

Remarque : On peut, bien sûr, pour toute partition $\mathscr{P}$ déterminer la σ-algèbre engendrée par cette partition, ce que l'on note par $\mathscr{A}(\mathscr{P})$. Ainsi la partition fondue de deux partitions $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$ peut être définie comme la partition qui engendre la σ-algèbre résultant de l'intersection des σ-algèbres engendrées par les deux partitions individuelles :

$$\mathscr{A}(\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2) = \mathscr{A}(\mathscr{P}_1) \cap \mathscr{A}(\mathscr{P}_2).$$

Proposition 1 (Aumann 1976) Un événement $E \subset \Omega$ est de *connaissance commune* dans le sens de la définition récursive de Lewis à l'état ω entre l'individu 1 et l'individu 2 si et seulement si $\hat{P}(\omega) \subset E$.

L'argument donné par Aumann pour démontrer cette proposition [4] repose sur le concept d'un événement élémentaire $\omega' \in \Omega$ étant *joignable* à partir d'un autre événement élé-

2. Une partition $\mathscr{P}_i$ de Ω est plus fine qu'une partition $\mathscr{P}_j$ du même ensemble Ω si toute classe de $\mathscr{P}_j$ est l'union des classes de $\mathscr{P}_i$ (voir, par exemple, Barbut 1968).

3. Voir, par exemple, Barbut (1968). Le lecteur soit averti que le nom « partition fondue » est notre traduction de « meet », terme employé par Aumann. Barbut parle tout simplement de la « partition la plus fine de toutes les partitions moins fines » des deux partitions données, et – et c'est une question plus importante – il utilise le symbole $\vee$ au lieu de $\wedge$ pour noter cet objet. Nous avons décidé d'utiliser ici $\wedge$, comme le fait Aumann, puisque s'est la notation devenue habituelle dans la littérature en théorie des jeux, théorie du choix et économie mathématique.

4. Chez Aumann cette proposition n'est pas explicitement énoncée comme « Proposition » mais est plutôt glissée dans le texte. Voir Aumann (1976), page 1237, le paragraphe qui commence avec « To see that ... ».

mentaire $\omega \in \Omega$. Avant de voir la démonstration de la Proposition 1, voyons alors cette notion.

Définition 2 Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux partitions de Ω. On dit qu'un événement élémentaire $\omega' \in \Omega$ est *joignable* à partir d'un autre événement élémentaire $\omega \in \Omega$, s'il existe une suite de sous-ensembles de Ω, $P^1, P^2, \ldots, P^n, \ldots, P^N$ telle que $\omega \in P^1$ et $\omega' \in P^N$ et les P^n consécutifs ont une intersection non vide et appartiennent de manière alternée à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

On vérifie facilement les deux constats suivants :

Lemme 1 Un sous-ensemble P de Ω est un élément de la partition fondue $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$ si et seulement si tous les $\omega' \in P$ sont joignables à partir de n'importe quel autre $\omega \in P$.

Lemme 2 Soit $P \subset \Omega$ un élément de la partition fondue $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$. Alors :

(a) l'union de toutes les classes P_{ik} de la partition $\mathscr{P}_i$ ayant une intersection non-vide avec P donne P lui-même,
$$\bigcup_{P_{ik} \subset P} P_{ik} = P,$$

(b) chacune des partitions individuelles $\mathscr{P}_i$, $i \in I$, induit une partition de P.

Démonstration (Proposition 1 – Aumann 1976) : Soit ω l'état réalisé, et $E \subset \Omega$ un événement. L'individu 1 sait que E s'est réalisé à l'état ω si $P_1(\omega) \subset E$. Supposons que c'est le cas et posons $P^1 = P_1(\omega)$. L'individu 1 sait que l'individu 2 sait que E s'est réalisé à l'état ω si tous les $P_{2k} \in \mathscr{P}_2$ ayant une intersection non vide avec P^1 sont sous-ensemble de E. Il convient de distinguer deux cas : (1) Si pour tous ces $P_{2k} \in \mathscr{P}_2$ ayant une intersection non vide avec P^1, l'intersection avec P^1 est P_{2k} lui-même, alors P^1 contiendra tous les $\omega' \in \Omega$ joignables à partir de ω. L'événement P^1 sera alors un élément de la partition fondue $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$, et toutes les phrases de la forme « i sait que j sait que i sait ... E » seront vraies ; c'est-à-dire, E sera de connaissance commune. (2) Sinon, définissons comme P^2 celui des $P_{2k} \in \mathscr{P}_2$ dont l'intersection non vide avec P^1 n'est pas P_{2k} lui-même. L'individu 1 sait que l'individu 2 sait que l'individu 1 sait E à l'état ω si tous les $P_{1k} \in \mathscr{P}_1$ ayant une intersection non vide avec P^2 sont sous-ensemble de E. On distingue de nouveau les deux cas relatifs : (1) Si pour tous ces $P_{1k} \in \mathscr{P}_1$, différents de P^1, l'intersection avec P^2 est P_{1k} lui-même, alors P^2 contiendra tous les ω' joignables à partir de ω. L'événement P^2 sera alors un élément de la partition fondue de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, et toutes les phrases de la forme « i sait que j sait que i sait ... E » seront vraies ; c'est-à-dire, E sera de connaissance commune. (2) Sinon, définissons comme P^3 celui des $P_{1k} \in \mathscr{P}_1$, différent de P^1, dont l'intersection avec P^2 n'est pas P_{1k} lui-même, et ainsi de suite. On voit alors que toutes les phrases de la forme « i sait que j sait que i sait ... E » sont vraies si et seulement si E contient tous les ω' joignables à partir de ω. Or, l'ensemble de tous les ω' joignables à partir de ω est un élément de la partition fondue de $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$. QED. [5]

5. Certains auteurs (par exemple, Geanakoplos 1992, 57 et 64–65) se servent du concept d'un événement

2.2 Le théorème d'Aumann

Théorème 1 (Aumann 1976) Soient $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ un espace probabilisé et $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux partitions finies de Ω, mesurables par rapport à $\mathscr{B}$, représentant l'information apportée à l'individu 1 respectivement 2 – tout ceci étant de connaissance commune entre les deux individus. Soit un événement $A \subset \Omega$. Si à l'état ω (grâce à la connaissance commune des partitions d'information) les probabilités a posteriori que les deux individus attribuent à A, q_1 et q_2,

$$q_i \;=\; \frac{p(A \cap P_i(\omega))}{p(P_i(\omega))} \quad i \in I = \{1, 2\},$$

sont de connaissance commune, alors elles sont égales : $q_1 = q_2$.

Démonstration : Soit $\hat{P}(\omega) \subset \Omega$ la classe de la partition fondue $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$ à laquelle appartient ω. Puisque la valeur q_i résultant du calcul

$$q_i \;=\; \frac{p(A \cap P_i(\omega))}{p(P_i(\omega))} \tag{2.1}$$

est de connaissance commune entre les deux individus, il s'en suit (par la Proposition 1) que pour n'importe laquelle des classes de la partition de l'individu i qui sont sous-ensemble de $\hat{P}(\omega)$, le calcul de la probabilité a posteriori de A doit conduire à la même valeur q_i ; c'est-à-dire :

$$q_i \;=\; \frac{p(A \cap P_{ik})}{p(P_{ik})} \quad \forall P_{ik} \subset \hat{P}(\omega) \tag{2.2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(A \cap P_{ik}) \;=\; q_i\, p(P_{ik}) \qquad \forall P_{ik} \subset \hat{P}(\omega) \tag{2.3}$$

étant *une évidence* (a *self-evident event*) pour expliquer la connaissance commune d'un événement. Dans cette démarche, l'opérateur $P_i(\cdot)$ est prolongé à des sous-ensembles de Ω :

$$P_i(A) = \bigcup_{\omega \in A} P_i(\omega).$$

On dit qu'un événement $A \subset \Omega$ est *une évidence* (a *self-evident event*) pour l'individu i, si $P_i(A) = A$, c'est-à-dire, s'il est vrai que si jamais A se réalise, alors l'individu i saura que A s'est réalisé. En d'autres termes : un tel événement ne peut se produire sans que l'individu i le sache. Il est clair que A *est une évidence* pour l'individu i si et seulement si A est l'union des éléments de la partition $\mathscr{P}_i$ de l'individu i. Or, cela ne veut dire rien d'autre que A est un élément de la σ-algèbre engendrée par la partition d'information de l'individu i, notée $\mathscr{A}(\mathscr{P}_i)$. Autrement dit, $\mathscr{A}(\mathscr{P}_i)$ est l'ensemble des événements qui sont une évidence pour i. Il s'en suit que l'intersection de $\mathscr{A}(\mathscr{P}_1)$ et $\mathscr{A}(\mathscr{P}_2)$ est l'ensemble des événements qui sont une évidence à la fois pour l'individu 1 et pour l'individu 2. (Certains auteurs appellent un tel événement un *événement public* ; voir, par exemple, Milgrom 1981, 221). L'élément de la partition fondue contenant ω, $P_1 \wedge P_2(\omega)$, est le plus petit événement contenant ω qui est une évidence à la fois pour l'individu 1 et pour l'individu 2. Nous savons déjà (voir remarque plus haut) que l'intersection de $\mathscr{A}(\mathscr{P}_1)$ et $\mathscr{A}(\mathscr{P}_2)$ est égale à la σ-algèbre engendrée par la partition fondue $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$, $\mathscr{A}(\mathscr{P}_1) \cap \mathscr{A}(\mathscr{P}_2) = \mathscr{A}(\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2)$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les événements qui sont non seulement une évidence pour chacun des deux individus mais dont il est au delà de cela aussi de connaissance commune qu'ils sont une évidence.

En sommant sur toutes les $P_{ik} \subset \hat{P}(\omega)$:

$$\sum_{P_{ik} \subset \hat{P}(\omega)} p(A \cap P_{ik}) \quad = \quad q_i \sum_{P_{ik} \subset \hat{P}(\omega)} p(P_{ik}). \tag{2.4}$$

Puisque les P_{ik} (étant des classes d'une partition) sont disjointes et leur union sur $\hat{P}(\omega)$ est $\hat{P}(\omega)$ lui-même (voir le Lemme 2), par la σ-additivité de la probabilité p sur Ω :

$$p(A \cap \hat{P}(\omega)) \quad = \quad q_i \, p(\hat{P}(\omega)) \tag{2.5}$$

Finalement, puisque ceci doit être vérifié pour chacun des individus $i \in I = \{1, 2\}$:

$$q_1 \, p(\hat{P}(\omega)) = \quad p(A \cap \hat{P}(\omega)) \quad = q_2 \, p(\hat{P}(\omega)), \tag{2.6}$$

ce qui implique que $q_1 = q_2$. QED.

Le moment clé de la démonstration est au début : le constat que puisque q_i est de connaissance commune, l'individu i doit arriver à q_i étant donné *n'importe laquelle des classes de sa partition d'information qui sont sous-ensemble de* $\hat{P}(\omega)$.

2.3 Les conditions d'Aumann

A travers la démonstration du résultat donnée par Aumann apparaît une propriété qui mérite d'être soulevée. Par (1), (2) et (6) on a :

$$q_i = \frac{p(A \cap P_i(\omega))}{p(P_i(\omega))} = \frac{p(A \cap P_{ik})}{p(P_{ik})} = \frac{p(A \cap \hat{P}(\omega))}{p(\hat{P}(\omega))} \quad \forall P_{ik} \subset \hat{P}(\omega) \tag{2.7}$$

C'est-à-dire : à l'état réalisé ω, la probabilité a posteriori attribuée à l'événement A par l'individu i est égale à :

(1) la probabilité a posteriori calculée à base de n'importe laquelle des autres classes P_{ik} de la partition $\mathscr{P}_i$ qui sont sous-ensemble de la classe de la partition fondue à laquelle appartient l'état réalisé $\hat{P}(\omega)$, et

(2) la probabilité de A sachant $\hat{P}(\omega)$, c'est-à-dire la probabilité a posteriori attribuée à A par la partition fondue des deux partitions individuelles.

Nous allons par la suite nous référer à l'équation (7) comme les « conditions d'Aumann ».

2.4 Exemples

Exemple 1

Voici un exemple dans lequel le résultat d'Aumann s'applique de manière non triviale, c'est-à-dire un exemple dans lequel la prémisse du résultat – qu'à l'état réalisé les probabilités a posteriori sont de connaissance commune – est satisfaite.

Soient $\Omega = \{a, b, c, d\}$ et la loi de probabilité a priori donnée par $p(\omega) = 1/4$ pour tous les événements élémentaires. Supposons que :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \\ \mathscr{P}_2 &= \{\{a, b, c, d\}\}, \end{aligned}$$

$A = \{b, c\}$, et l'état réalisé $\omega^\star = a$.

Les probabilités a posteriori attribuées à A par les deux individus étant donné l'information apportée par leurs partitions d'informations sont :

$$\begin{aligned} \frac{p(A \cap P_1(\omega^\star))}{p(P_1(\omega^\star))} &= \frac{p(\{b, c\} \cap \{a, b\})}{p(\{a, b\})} = \frac{p(\{b\})}{p(\{a, b\})} = \frac{1}{2} \\ \frac{p(A \cap P_2(\omega^\star))}{p(P_2(\omega^\star))} &= \frac{p(\{b, c\} \cap \{a, b, c, d\})}{p(\{a, b, c, d\})} = \frac{p(\{b, c\})}{p(\{a, b, c, d\})} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Attention : le fait que les probabilités a posteriori attribuées à A sont égales ne suffit pas pour conclure que le résultat d'Aumann s'applique de manière non triviale, puisque c'est la conséquence du résultat et non sa prémisse. (Il y des exemples dans lesquels les probabilités a posteriori attribuées à A sont égales mais pas de connaissance commune. L'exemple 4 en sera une illustration). Mais il faut vérifier si les probabilités a posteriori attribuées à A sont de *connaissance commune* entres les individus. On le vérifie assez étroitement dans cet exemple : puisque $P_1(a) = \{a, b\} \subset P_2(a) = \{a, b, c, d\}$, il est de connaissance commune entre les deux individus que l'individu 2 n'a reçu que l'information que l'état réalisé appartient à $\{a, b, c, d\}$ et que la probabilité a posteriori attribuée à A par l'individu 2 est alors de $1/2$. Il se trouve ainsi, pour le dire plus généralement, que la classe de la partition de l'individu 2 avec laquelle l'individu 2 fait son calcul de la probabilité a posteriori de A est de connaissance commune entre les deux individus, et il va alors de soi que le résultat de ce calcul est de connaissance commune entre les deux individus. En ce qui concerne l'individu 1, la classe de la partition de l'individu 1 avec laquelle elle fait son calcul de la probabilité a posteriori de A n'est pas de connaissance commune, puisque l'individu 2 ne sait pas si l'individu 1 a reçu l'information que l'état réalisé appartient à $\{a, b\}$ ou bien l'information que l'état réalisé appartient à $\{c, d\}$. Or il est de connaissance commune que l'individu 1 a reçu l'une des deux informations et quel que soit le cas, le calcul effectué par l'individu 1 conduira toujours au même résultat, puisque :

$$\frac{p(\{\overbrace{b, c}^{A}\} \cap \{c, d\})}{p(\{c, d\})} = \frac{p(\{c\})}{p(\{c, d\})} = \tfrac{1}{2} = \frac{p(\{b\})}{p(\{a, b\})} = \frac{p(\{\overbrace{b, c}^{A}\} \cap \{a, b\})}{p(\{a, b\})}.$$

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}_1 & = & \{ \overbrace{\{ a,\ b \}}^{p(A|\{a,b\})=\frac{1}{2}} \ , \ \overbrace{\{ c,\ d \}}^{p(A|\{c,d\})=\frac{1}{2}} \ \} \\ \mathscr{P}_2 & = & \{ \underbrace{\{ a,\ b,\ c,\ d \}}_{p(A|\{a,b,c,d\})=\frac{1}{2}} \ \} \end{array}$$

FIGURE 2.1 – Exemple 1 : les conditions d'Aumann.

En d'autres termes, pour tout élément de la partition $\mathscr{P}_1$ étant sous-ensemble de la classe de la partition fondue contenant le vrai état du monde a, $\hat{P}(a) = P_1 \wedge P_2(a) = \{a, b, c, d\}$, le calcul de la probabilité a posteriori de l'événement A effectué par l'individu 1 – et ceci est de connaissance commune entre les deux individus – conduit toujours au même résultat, 1/2, et par conséquent, il est de connaissance commune que la probabilité a posteriori que l'individu 1 attribue à A est de 1/2.

La partition fondue des deux partitions est : $\hat{\mathscr{P}} = \{\{a, b, c, d\}\}$, et ainsi $\hat{P}(a) = \{a, b, c, d\}$. La probabilité a posteriori de $A = \{b, c\}$ étant donné l'information apportée par la partition fondue $\hat{\mathscr{P}}$ à l'état $\omega = a$ est bien égale aux probabilités a posteriori des deux individus, comme le veut l'équation 7 – les conditions d'Aumann :

$$p(\{b, c\} \mid \hat{P}(a)) \quad = \quad \frac{p(\{b, c\} \cap \{a, b, c, d\})}{p(\{a, b, c, d\})} = \frac{p(\{b, c\})}{p(\{a, b, c, d\})} = \frac{1}{2}.$$

Ce calcul coïncide avec celui de l'individu 2 ; bien évidemment puisque $\hat{P}(a) = P_2(a) = \{a, b, c, d\}$. La Figure 1 représente cette situation.

Exemple 2

Voici un autre exemple dans lequel le résultat d'Aumann s'applique de manière non triviale.

Soient $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ et la loi de probabilité a priori donnée par $p(\omega) = 1/6$ pour tous les événements élémentaires. Supposons que :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}_1 & = & \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}, \{f\}\}, \\ \mathscr{P}_2 & = & \{\{d, b\}, \{c, a\}, \{e, f\}\}, \end{array}$$

$A = \{b, c\}$, et $\omega^\star = a$.

Les probabilités a posteriori attribuées à A par les deux individus étant donné l'information

$$\begin{array}{lcl}
\mathscr{P}_1 & = & \{ \overbrace{\overbrace{\{a,\ b\}}^{p(A|\{a,b\})=\frac{1}{2}} ,\ \overbrace{\{c,\ d\}}^{p(A|\{c,d\})=\frac{1}{2}}}^{p(A|\{a,b,c,d\})=\frac{1}{2}} ,\ \{e\},\ \{f\}\} \\
\mathscr{P}_2 & = & \{ \underbrace{\underbrace{\{a,\ c\}}_{p(A|\{a,c\})=\frac{1}{2}} ,\ \underbrace{\{b,\ d\}}_{p(A|\{b,d\})=\frac{1}{2}}}_{p(A|\{a,b,c,d\})=\frac{1}{2}} ,\ \{e, f\}\}
\end{array}$$

FIGURE 2.2 – Exemple 2 : les conditions d'Aumann.

apportée par leurs partitions d'informations sont :

$$\begin{aligned}
\frac{p(A \cap P_1(\omega^\star))}{p(P_1(\omega^\star))} &= \frac{p(\{b,c\} \cap \{a,b\})}{p(\{a,b\})} = \frac{p(\{b\})}{p(\{a,b\})} = \frac{1}{2} \\
\frac{p(A \cap P_2(\omega^\star))}{p(P_2(\omega^\star))} &= \frac{p(\{b,c\} \cap \{c,a\})}{p(\{c,a\})} = \frac{p(\{c\})}{p(\{c,a\})} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ici ni l'un ni l'autre connaît l'élément de la partition de l'autre dont l'autre sait que l'état réalisé y appartient. Chacun doit penser possible que l'autre ait reçu tout élément de la partition de l'autre inclus dans $\hat{P}(a) = \{a, b, c, d\}$, l'élément de la partition fondue auquel appartient l'état réalisé. Mais quel que soit le cas, pour chacun des individus, le calcul de la probabilité a posteriori de l'événement $A = \{b, c\}$ conduira toujours au même résultat, puisque on a également :

$$\begin{aligned}
\frac{p(\{b,c\} \cap \{c,d\})}{p(\{c,d\})} &= \frac{p(\{c\})}{p(\{c,d\})} = \frac{1}{2} \\
\frac{p(\{b,c\} \cap \{b,d\})}{p(\{b,d\})} &= \frac{p(\{b\})}{p(\{b,d\})} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et par conséquent les probabilités a posteriori de A sont de connaissance commune.

Ici, la partition fondue des deux partitions est : $\hat{\mathscr{P}} = \{\{a, b, c, d\}, \{e, f\}\}$, et alors l'élément de la partition fondue auquel appartient l'état réalisé $\hat{P}(a) = \{a, b, c, d\}$. Comme il le faut, selon les conditions d'Aumann :

$$p(\{b,c\} \mid \hat{P}(a)) = \frac{p(\{b,c\} \cap \{a,b,c,d\})}{p(\{a,b,c,d\})} = \frac{p(\{b,c\})}{p(\{a,b,c,d\})} = \frac{1}{2}.$$

La Figure 2 illustre cette situation.

Exemple 3

Ceci est un exemple dans lequel le résultat d'Aumann s'applique de manière triviale dans le sens que sa prémisse (que les probabilités a posteriori de A soient de connaissance commune) n'est *pas* satisfaite.

Soient $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et la loi de probabilité a priori donnée $p(\omega) = 1/7$ pour tous les événements élémentaires. Supposons que :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \{\{a, b\}, \{c, e\}, \{d, f, g\}\}, \\ \mathscr{P}_2 &= \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e, f, g\}\}, \end{aligned}$$

$A = \{b, e\}$, et $\omega^\star = b$.

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{p(A \cap P_1(\omega^\star))}{p(P_1(\omega^\star))} &= \frac{p(\{b, e\} \cap \{a, b\})}{p(\{a, b\})} = \frac{p(\{b\})}{p(\{a, b\})} = \frac{1}{2} \\ \frac{p(A \cap P_2(\omega^\star))}{p(P_2(\omega^\star))} &= \frac{p(\{b, e\} \cap \{b, c, d\})}{p(\{b, c, d\})} = \frac{p(\{b\})}{p(\{b, c, d\})} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On vérifie facilement qu'ici les individus n'ont pas connaissance commune des probabilités a posteriori que l'autre attribue à l'événement $A = \{b, e\}$. Considérons d'abord l'individu 1. Elle pense que l'état réalisé est soit a soit b. Elle doit alors se dire : Si a s'est réalisé, l'individu 2 va sûrement savoir que a s'est réalisé et il va alors attribuer une probabilité nulle à l'événement $A = \{b, e\}$; si b s'est réalisé, l'individu 2 va seulement savoir que l'un des états appartenant à $\{b, c, d\}$ s'est réalisé, et il va alors attribuer une probabilité de $1/3$ à l'événement $A = \{b, e\}$. De manière similaire, l'individu 2, de son coté, ne peut pas savoir si l'individu 1 attribuera à $A = \{b, e\}$ une probabilité a posteriori de $1/2$ (au cas où l'individu 1 ait reçu l'information $\{a, b\}$ ou $\{c, e\}$) ou nulle (au cas où elle ait reçu l'information $\{d, f, g\}$). Ici : $\hat{\mathscr{P}} = \{\{a, b, c, d, e, f, g\}\}$, $\hat{P}(b) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, et alors : $p(\{b, e\} \mid \hat{P}(b)) = 2/7$.

Exemple 4

Ceci est un exemple qui démontre que la réciproque du résultat est fausse : qu'il se peut que les probabilités a posteriori attribuées à un certain événement soient égales mais pas de connaissance commune.

Soient $\Omega = \{a, b, c, d\}$ et la loi de probabilité a priori donnée par $p(\omega) = 1/4$ pour tous les événements élémentaires. Supposons que :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \\ \mathscr{P}_2 &= \{\{d, b\}, \{c, a\}\}, \end{aligned}$$

$A = \{a\}$, et $\omega^\star = a$.

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{p(A \cap P_1(\omega^\star))}{p(P_1(\omega^\star))} &= \frac{p(\{a\} \cap \{a,b\})}{p(\{a,b\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{a,b\})} = \frac{1}{2} \\ \frac{p(A \cap P_2(\omega^\star))}{p(P_2(\omega^\star))} &= \frac{p(\{a\} \cap \{c,a\})}{p(\{c,a\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{d,b\})} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ici chacun des deux individus attribue une probabilité a posteriori de 1/2 à l'événement $A = \{a\}$, mais les individus ne savent pas si l'autre le sait. Considérons d'abord l'individu 1. Etant donné qu'elle sait seulement que l'état réalisé appartient à $\{a, b\}$, elle ne sait pas si l'individu 2 a reçu l'information que l'état réalisé appartient à $\{c, a\}$ ou bien l'information que l'état réalisé appartient à $\{d, b\}$. Cela importe, puisque dans un cas la probabilité a posteriori attribuée à $A = \{a\}$ est de 1/2, et dans l'autre 0. De manière similaire, l'individu 2 ne sait pas si l'individu 1 attribue à $A = \{a\}$ une probabilité de 1/2 ou 0. Nous voyons alors qu'ici déjà au premier niveau du croisement des croyances concernant la probabilité a posteriori attribuée à $A = \{a\}$, il y a divergence et, par conséquent, il ne peut pas y avoir connaissance commune. Remarquons aussi qu'ici la probabilité a posteriori attribuée à $A = \{a\}$ étant donné l'information apportée par la partition fondue, $\hat{\mathscr{P}} = \{a, b, c, d\}$, diverge des probabilités a posteriori attribuées à $A = \{a\}$ par les deux individus :

$$p(\{a\} \mid \hat{P}(a)) = \frac{p(\{a\} \cap \{a,b,c,d\})}{p(\{a,b,c,d\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{a,b,c,d\})} = \frac{1}{4}.$$

2.5 Remarques et interprétations

2.5.1 Une prémisse importante : les partitions d'information sont de connaissance commune

Aumann (1976) énonce son résultat comme suit :

> Soient $\omega \in \Omega$, et q_1 et q_2 des nombres. Si à l'état ω il est de connaissance commune que $\mathbf{q_1} = q_1$ et $\mathbf{q_2} = q_2$, alors $q_1 = q_2$.[6]

En dehors de son modèle mathématique, cette formulation condensée peut troubler puisqu'elle ne précise pas *pourquoi – comment – les probabilités a posteriori sont de connaissance commune entre les deux individus.* On peut avoir l'impression qu'il suffisse que les probabilités a posteriori soient rendues de connaissance commune n'importe comment – comme, par exemple, par un acte de parole publique. Or cela ne suffit pas. Pour que le résultat tienne, il faut que chacun des deux individus arrive à savoir que les probabilités a posteriori attribuées à A sont de connaissance commune tout simplement en exploitant le

6. Aumann 1976, 1237 : « Let $\omega \in \Omega$, and let q_1 and q_2 be numbers. If it is common knowledge at ω that $\mathbf{q_1} = q_1$ and $\mathbf{q_2} = q_2$, then $q_1 = q_2$. »

fait que les partitions d'information (et la loi de probabilité a priori qui règne sur Ω) sont de connaissance commune. [7]

Aumann sait que cet aspect peut surprendre, ou être mal compris, et après avoir délivré la démonstration il poursuit :

> Il convient de noter l'hypothèse implicite que les partitions d'information $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont elles-même de connaissance commune. Or, ceci est sans perte de généralité. Inclus dans la description complète de l'état du monde ω est la manière dont les deux individus reçoivent de l'information. Ceci implique que les ensembles d'information $P_1(\omega)$ et $P_2(\omega)$ sont en fait définis sans ambiguïté par ω et que les deux joueurs connaissent ces fonctions. [8]

Revenant à son article, plus de quarante ans plus tard, Aumann renforce ce point de vue qui accorde une place centrale au concept de l'état du monde : « En d'autres mots, 'l'hypothèse implicite' n'est pas vraiment une hypothèse ; elle fait partie de ce que veut dire *état du monde.* » [9]

2.5.2 Une interprétation en termes d'indépendance en probabilité – la propriété « de la tour »

La prémisse du résultat d'Aumann – que les probabilités a posteriori sont de connaissance commune grâce à la connaissance commune de la probabilité a priori et des partitions d'information – constitue plutôt un cas particulier. Ce qui caractérise ce cas apparaît à travers la démonstration – ce que nous appelons ici les *conditions d'Aumann* (équation 2.7). Ces conditions exigent que pour chacun des individus, la probabilité de A sachant $P_i(\omega)$, ou bien la probabilité de A sachant n'importe laquelle des autres classes de la partition $\mathscr{P}_i$ qui est sous-ensemble de la classe de la partition fondue à laquelle appartient le vrai état du monde $\hat{P}(\omega)$, et la probabilité de A sachant $\hat{(}\omega)$ sont égales. Mais cela ne veut dire rien d'autre que *sous condition que* $\hat{P}(\omega)$ *s'est réalisé* (ce qui est de connaissance commune entre les deux individus) la probabilité de A est *indépendante* des P_{ik} partitionnant $\hat{P}(\omega)$.

---

7. Le lecteur du papier, notamment de la démonstration, s'en rend compte au plus tard à l'étape 2, le moment clé de la démonstration, lorsqu'on constate que puisque les $q_i = \frac{p(A \cap P_i(\omega))}{p(P_i(\omega))}$ sont de connaissance commune entre les deux individus, il faut alors que pour n'importe lequel des éléments de la partition de l'individu i étant sous-ensemble de $P_1 \wedge P_2(\omega)$ le calcul de la probabilité a posteriori de A doit conduire à la même probabilité q_i. Le résultat n'est, après tout, pas intelligible autrement.

8. Aumann (1976, 1237) : « Worthy of note is the implicit assumption that the information partitions $\mathscr{P}_1$ and $\mathscr{P}_2$ are themselves common knowledge. Actually, this constitutes no loss of generality. Included in the full description of a state ω of the world is the manner in which information is imparted to the two persons. This implies that the information sets $P_1(\omega)$ and $P_2(\omega)$ are indeed defined unambiguously as functions of ω, and that these functions are known to both players. »

9. Robert Aumann, communication personnelle, Mars 24, 2019 : « In other words, the 'implicit assumption' is not really an assumption ; it is part of what is meant by *state of the world.* »

En d'autres termes, *en ce qui concerne l'événement A, la partition* $\mathscr{P}_i$ *induite par* $\hat{P}(\omega)$ *n'apporte aucune information supplémentaire au delà de l'information apportée par la partition fondue* $\hat{\mathscr{P}}$. En théorie des probabilitiés on apelle cette relation « la Proporiété de la Tour » (the Tower Property), voire, par example Williams (1991, 88, théorème 9.7). [10]

Sous cette forme-là, le résultat d'Aumann devient parfaitement lucide : si à l'état ω, par rapport à un certain événement A, les partitions individuelles n'apportent aucune information supplémentaire au delà de ce qui est de connaissance commune entre les individus, alors bien évidemment, les probabilités a posteriori des individus concernant A devraient être de connaissance commune et identiques. En d'autres mots : en ce qui concerne l'événement A, dans la mesure où les informations des individus sont différentes au delà de ce qui est de connaissance commune, elles sont sans importance.

2.5.3 Une interprétation en termes du principe de la chose sûre

Les conditions d'Aumann peuvent aussi être interprétées par le prisme de ce que l'on appelle en théorie du choix *le principe de la chose sûre* (cet argument est donné, entre autres, par Geanakoplos 1992, 66–67). *Le principe de la chose sûre* (Savage 1954) dit le suivant : si la probabilité conditionnelle d'une variable aléatoire étant donné un sous-ensemble E de l'ensemble fondamental Ω est q et si la probabilité conditionnelle de cette même variable aléatoire étant donné un sous-ensemble F de Ω, disjoint de E, est aussi q, alors la probabilité conditionnelle de cette variable aléatoire, étant donné $E \cup G$, doit aussi être q. On peut, bien sûr, prolonger ce résultat à toute suite finie de sous-ensembles disjoints de Ω. Maintenant, sachant que les classes d'information P_{ik} de la partition d'information d'un individu sont toutes disjointes et que l'union de toutes ces classes ayant une intersection non-vide avec $\hat{P}(\omega)$ est $\hat{P}(\omega)$ lui-même, on voit alors que les conditions d'Aumann (équation 7) se ramènent au principe de la chose sûre.

2.5.4 Les conditions d'Aumann dans le réel, un cas rare ?

Dans des applications, la question de l'indépendance se pose essentiellement au niveau d'une relation entre la nature des choses que l'on peut observer. Dans la nature des choses, il peut y avoir des raisons pour lesquelles on doit, ou devrait, postuler qu'un certain événement A soit indépendant d'une certaine variable aléatoire qui permet à un individu de différencier plusieurs états du monde.

Imaginons, par exemple, que Ω représente les qualités possibles d'un candidat pour un poste de professeur en mathématiques, et que A est l'événement que le candidat soit qualifié pour ce poste. Les deux individus 1 et 2 sont des membres de la commission de recrutement.

10. Je remercie très vivement Matthias Beigelböck et Daniel Toneian de m'avoir indiqué cette relation.

Supposons qu'a priori les deux membres de la commission imposent la même probabilité sur Ω et qu'ils ont accès aux mêmes informations – à deux différences près : premièrement, l'individu 1 ne peut pas distinguer les couleurs rouges et vertes, alors que l'individu 2 le peut ; deuxièmement, l'individu 1 est amateur d'une certaine marque de montres suisses, alors que l'individu 2 ne connaît rien au sujet, tout cela étant de connaissance commune entre les deux individus. Le jour de l'entretien, le candidat arrive avec un pull rouge et porte une montre de la marque préférée de l'individu 1. Il est alors instantanément connaissance commune entre les deux individus que l'individu 1 ne sait pas si le candidat porte un pull rouge ou vert, alors que l'individu 2 le sait, aussi bien que l'individu 1 sait si la montre du candidat est de la marque admirée par l'individu 1, alors que l'individu 2 ne le sait pas. Or, si le candidat porte un pull rouge (ou pas) aussi bien que si sa montre est de cette marque (ou pas) est sans intérêt pour savoir si le candidat est qualifié pour le poste en question. En d'autres termes, l'événement que le candidat soit qualifié pour ce poste est *indépendant* de l' événement qu'il porte un pull rouge (ou pas) et est *indépendant* de l'événement qu'il porte une montre de la marque en question (ou pas). Ceci étant de connaissance commune entre les deux membres de la commission – aussi bien que le fait qu'en dehors de cela ils ont accès aux mêmes informations – ils devraient alors arriver à la même probabilité a posteriori concernant l'événement que le candidat soit qualifié pour ce poste.

Les conditions d'Aumann sont-elles rares en réalité ? Non. Mais ce sont souvent les cas dans lesquels, a juste titre, on fait abstraction des informations individuelles que possède un individu – précisément puisqu'on sait qu'elles sont sans importance par rapport à l'événement qui intéresse.

2.5.5 Aucun niveau du croisement des connaissances des probabilités a posteriori ne suffit pour que les probabilités a posteriori soient égales

Aumann (1976) précise que son résultat « ne tient pas si les gens ont seulement connaissance de la probabilité a posteriori de l'autre ».[11] Pour le démontrer, il donne l'exemple suivant : Soient $\Omega = \{a, b, c, d\}$,

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \{\{a,b\},\{c,d\}\}, \\ \mathscr{P}_2 &= \{\{a,b,c\},\{d\}\} \end{aligned}$$

$\omega^\star = a$ l'état réalisé et $A = \{a, d\}$. Alors $q_1 = P(A \mid P_1(a)) = 1/2$ et $q_2 = P(A \mid P_2(a)) = 1/3$.

Ici, comme Aumann l'explique, l'individu 1 sait que l'individu 2 attribue à A une probabilité actualisée de $q_2 = 1/3$ et l'individu 2 sait que l'individu 1 attribue à A une probabilité

11. Aumann (1976, 1237) : « The result fails when people merely know each other's posteriors. »

actualisée de $q_1 = 1/2$. Il y aura alors connaissance de la probabilité a posteriori de l'autre au premier niveau du croisement des connaissances. L'individu 1, de son coté, sait aussi que l'individu 2 connaît q_1. Mais l'individu 2 ne sait pas si l'individu 1 connaît q_2 ou pas (puisque si l'état réalisé était c, ce que l'individu 2 doit penser possible, l'individu 1 aurait reçu l'information que le vrai état est c ou d, et si c'était c, l'individu 1 ne saurait pas si l'individu 2 avait reçu l'information $\{a, b, c\}$ ou $\{d\}$). C'est-à-dire, la connaissance des connaissances s'effondre au deuxième niveau du croisement des connaissances.

Ce constat – et c'est un point qu'Aumann (1976) ne remarque pas à cet endroit – en effet s'étend à tout niveau $n \in \mathbb{N}$ du croisement des connaissance.

Si on prolonge l'exemple donné par Aumann à tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient : $\Omega = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n^2\}$, $p(\omega) = 1/n^2$ pour tous les événements élémentaires,

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_1 &= \{\{1, \ldots, n\}, \{n+1, \ldots, 2n\}, \{2n+1, \ldots, 3n\}, \ldots, \{(n-1)n+1, \ldots, n^2\}\}, \\
\mathscr{P}_2 &= \{\{1, \ldots, n+1\}, \{n+2, \ldots, 2n+2\}, \{2n+3, \ldots, 3n+3\}, \ldots, \{(n-2)n+(n-1), \ldots, n^2-1\}, \{n^2\}\}
\end{aligned}$$

$A = \{1, n+1, 2n+1, \ldots, (n-2)n+(n-1), n^2\}$, et $\omega^\star = 1$. On constate que quel que soit le $n \in \mathbb{N}$, les probabilités a posteriori que les deux individus attribuent à A sont différentes ($1/n$ pour l'individu 1 et $1/(n+1)$ pour l'individu 2) et que la connaissance des connaissances croisées par rapport aux probabilités a posteriori de l'autre se heurte toujours au niveau n du croisement des connaissances. Cet exemple paramétrique démontre alors *qu'aucun niveau fini du croisement des connaissances des probabilités a posteriori n'est suffisant pour que les probabilités a posteriori soient égales.*

Voyons-le de manière plus détaillée pour le cas $n = 3$:

- niveau 1 : 1 sait que $q_2 = 1/4$, et 2 sait que $q_1 = 1/3$;
- niveau 2 : 1 sait que 2 sait que $q_1 = 1/3$, et 2 sait que 1 sait que $q_2 = 1/4$;
- niveau 3 : mais 1 ne sait pas si 2 sait que 1 sait que $q_2 = 1/4$, alors que 2 sait que 1 sait que 2 sait que $q_1 = 1/3$; la connaissance des connaissances se heurte au troisième niveau du croisement des connaissances.

Aumann (1976) ne fait pas référence à cet exemple paramétrique dans le contexte de la présente discussion. Or, Aumann semble connaître cet exemple dans un autre contexte : Geanakoplos et Polemarchakis (1982), qui utilisent cet exemple pour exposer une propriété intéressante des dialogues à travers les probabilités actualisées, disent de l'avoir appris par Aumann. C'est aussi dans ce contexte-là que je vais revenir à cet exemple dans le chapitre 4.

Chapitre 3

La communication directe

Et si les individus pouvaient partager l'information que chacun d'eux a obtenue individuellement selon sa partition d'information ? Imaginons, par exemple, qu'après la réalisation du vrai état du monde, chacun des individus communique à l'autre la classe de sa partition d'information dont il ou elle sait désormais qu'elle contient la vrai état du monde. Nous appelons un tel échange d'information un *processus de communication directe*. Ce que les individus savent après un tel échange est représenté par ce que l'on appelle la *partition croisée* des deux partitions.

Définition 2 Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux partitions finies de l'ensemble fondamental Ω. On appelle la *partition croisée* (the *joint*) de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, et l'on note par $\check{\mathscr{P}} = \mathscr{P}_1 \vee \mathscr{P}_2$, le *raffinement commun le plus grossier (le moins fin)* de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$; c'est-à-dire la partition de Ω la plus grossière (la moins fine) telle que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\check{P}(\omega) \subset P_i(\omega), \quad \forall i \in I = \{1, 2\},$$

sachant que $\check{P} = P_1 \vee P_2(\omega)$ est la classe de la partition croisée $\mathscr{P}_1 \vee \mathscr{P}_2$ contenant ω.

En pratique, les classes de $\check{\mathscr{P}} = \mathscr{P}_1 \vee \mathscr{P}_2$ sont obtenues en prenant l'intersection de chaque classe de l'une des deux matrices par toutes les classes de l'autre. [1]

On peut, bien sûr – de la même façon que pour n'importe quelle partition – calculer pour tout événement A (mesurable par rapport à la loi probabilité a priori p) sa probabilité a posteriori étant donné l'information apportée par la partition croisée des deux partitions $\check{\mathscr{P}}$:

$$p(A \mid \check{P}(\omega)) = \frac{p(A \cap \check{P}(\omega))}{p(P_1 \vee P_2(\omega))}.$$

En général, la probabilité a posteriori de A étant donné l'information apportée par la partition croisée $p(A \mid \check{P}(\omega))$ et la probabilité a posteriori de A étant donné l'information

1. Voir, par exemple, Barbut (1968, 6). Remarquons ici que Barbut utilise le symbole $\wedge$ pour la partition croisée et $\vee$ pour la partition foundue.

apportée par la partition fondue $p(A \mid \hat{P}(\omega))$ ne coïncident pas. Mais cela peut se produire.

Dans le cas particulier où les conditions d'Aumann (7) sont satisfaites, il suffit que $\check{P}(\omega)$ coïncide avec $P_i(\omega)$ pour l'un des deux individus pour garantir que la probabilité a posteriori de A étant donné l'information apportée par la partition croisée $p(A \mid \check{P}(\omega))$ est égale à la probabilité a posteriori de A étant donné l'information apportée par la partition fondue $p(A \mid \hat{P}(\omega))$. L'argument est le suivant : si les conditions d'Aumann s'appliquent, $p(A \mid P_i(\omega)) = p(A \mid \hat{P}(\omega)$, pour tout $i = 1, 2$. Alors si pour au moins l'un des individus $\check{P}(\omega) = P_i(\omega)$, on aura $p(A \mid \check{P}(\omega)) = p(A \mid \hat{P}(\omega))$. Dans une telle situation : même si les individus peuvent se communiquer l'information que chacun d'eux a reçue individuellement selon sa partition d'information, ils n'arriveront pour autant à une autre probabilité a posteriori de A que celle que chacun d'eux trouve individuellement. L'exemple 1 en est une illustration.

Exemple 1 - suite.

Dans l'exemple 1, la partition croisée coïncide avec celle de l'individu 1 :

$$\check{\mathscr{P}} = \mathscr{P}_1 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}.$$

On a : $\check{P}(a) = P_1(a) = \{a, b\}$. Et alors :

$$p(\{b, c\} \mid \check{P}(a)) = p(\{b, c\} \mid P_1(a)) = \frac{p(\{b, c\} \cap \{a, b\})}{p(\{a, b\})} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2 - suite.

Dans l'exemple 2, dans lequel les conditions d'Aumann sont aussi satisfaites, la partition croisée des deux partitions est la partition la plus fine :

$$\check{\mathscr{P}} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}.$$

Dans cet exemple, la partition croisée ne coïncide ni avec la partition d'information de l'individu 1 ni avec celle de l'individu 2. La partition croisée raffine plutôt les deux partitions d'information individuelles. Supposons, comme avant, que a se réalise. Maintenant, si l'individu 1 dit à l'individu 2 : « J'ai reçu l'information que l'état réalisé appartient à $\{a, b\}$ », et l'individu 2 dit à l'individu 1 : « J'ai reçu l' information que l'état réalisé appartient à $\{a, c\}$ », les deux individus peuvent alors en déduire que l'état réalisé appartient à $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$ – ce qui est bien l'élément de la partition croisée contenant l'état réalisé a – et que par conséquent l'événement $A = \{b, c\}$ s'est alors sûrement pas réalisé :

$$p(\{b, c\} \mid \check{P}(a)) = \frac{p(\{b, c\} \cap \{a\})}{p(\{a\})} = \frac{p(\emptyset)}{p(\{a\})} = 0.$$

On constate que cette probabilité attribuée à A a posteriori est différente des probabilités a posteriori attribuées à A par les deux individus, qui sont toutes les deux égales à $1/2$.

Donc, si les deux individus se communiquent véridiquement l'information que chacun d'eux a reçue selon sa partition d'information individuelle, ils arrivent à savoir plus que chacun d'eux sait individuellement et ce qui est, en l'occurrence, de connaissance commune entre les deux.

Exemple 3 - suite.

Dans l'exemple 3, dans lequel *les conditions d'Aumann ne sont pas satisfaites*, la partition croisée est

$$\check{\mathscr{P}} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\{f, g\}\},$$

et alors

$$p(\{b, e\} \mid \check{P}(b)) = \frac{p(\{b, e\} \cap \{b\})}{p(\{b\})} = \frac{p(\{b\})}{p(\{b\})} = 1.$$

C'est-à-dire : si les deux individus arrivent à se communiquer véridiquement l'information que chacun d'eux a reçue individuellement selon sa partition d'information, ils arriveront à connaître le vrai état du monde qui s'est réalisé, $\omega = b$, et ils sauront alors que l'événement $A = \{b, e\}$ s'est réalisé, $p(\{b, e\} \mid \check{P}(b)) = 1$, ce qui est, on le note, une probabilité a posteriori différente de celles attribuées à A selon les partitions d'information individuelles (1/2 pour l'individu 1, et 1/3 pour l'individu 2).

Exemple 4 - suite.

Dans l'exemple 4, dans lequel *les conditions d'Aumann ne sont pas satisfaites non plus*,

$$\check{\mathscr{P}} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\},$$

et alors

$$p(\{a\} \mid \check{P}(a)) = \frac{p(\{a\} \cap \{a\})}{p(\{a\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{a\})} = 1.$$

Résumant les observations que l'on peut faire dans ces exemples : les conditions d'Aumann (équation 7) ne sont ni nécessaires ni suffisantes pour que la communication directe permette aux individus de savoir plus que chacun d'eux sait déjà grâce à sa partition d'information.

Chapitre 4

La communication indirecte à travers les croyances : un « dialogue bayésien »

Vers a fin de son article, Aumann se réfère à des travaux sur la formation d'opinion qui s'intéressent à des procédures d'échange d'opinions pour arriver à une opinion jointe (Dalkey 1972, DeGroot 1974) et il illustre comment un tel processus s'appliquera à son modèle :

> Supposons qu'a priori 1 et 2 imposent une loi uniforme sur le paramètre d'une pièce, et soit A l'événement que l'on obtienne F (face) au prochain jet. Supposons que chaque personne a le droit de faire un jet auparavant et que les résultats respectifs sont F et P (pille). Si l'information de chacun est précisément le résultat du jet qu'il a observé au préalable, les probabilités a posteriori de A sont $2/3$ et respectivement $1/3$. Si tous les deux informent l'autre de sa probabilité a posteriori de A, alors ils vont tous les deux conclure que les résultats des jets au préalable étaient F et P, et ils vont alors tous les deux réviser la probabilité a posteriori de A pour l'égaliser à $1/2$. [1]

Aumann envisage une extension de l'exemple dans laquelle les individus ne sont pas parfaitement informés du nombre de jets que chacun a pu observer mais connaissent seulement la probabilité a priori de cette variable. « Notre résultat », Aumann dit, « implique que le processus d'échange de l'information des probabilités a posteriori de A continuera jusqu'à ce que ces probabilités a posteriori soient égales. »

1. Aumann (1976, 1238) : « Suppose 1 and 2 have a uniform prior on the parameter of a coin, and let A be the event that the coin will come up H (heads) on the next toss. Suppose that each person is permitted to make one previous toss, and that these tosses come up H and T (tails) respectively. If each one's information consists precisely of the outcomes of this toss, then the posteriors for A will be $\frac{2}{3}$ and $\frac{1}{3}$ respectively. If each one then informs the other of his posterior, then they will both conclude that the previous tosses came up once H and once T, so that both posteriors will be revised to $\frac{1}{2}$. »

4.1 Définition

Muni du cadre formel établi par Aumann, on peut définir un tel processus de communication indirecte à travers les probabilités actualisées en toute généralité (Geanakoplos et Polemarchakis 1982). Suivant Geanakoplos et Polemarchakis, supposons plus précisément que les deux individus se communiquent, tour à tour, les probabilités a posteriori de A étant donné l'information apportée par leur partition d'information et par ce qu'ils ont appris à travers les étapes précédentes.

Un tel processus peut se comprendre de la façon suivante : a chaque étape, l'annonce de l'individu dont c'est le tour va le rendre de connaissance commune qu'un certain sous-ensemble de Ω *ne peut pas contenir le vrai état du monde* et peut alors être écarté de Ω en connaissance commune. Le processus commence avec $\hat{P}(\omega)$, certainement puisque tout au début – avant que le processus d'échange des probabilités actualisées commence – il y a déjà une partie de l'ensemble fondamental dont les deux individus savent en connaissance commune qu'elle ne peut pas contenir le vrai état : l'ensemble de tous les états qui n'appartiennent pas à la classe de la partition fondue qui contient le vrai état $\hat{P}(\omega)$. Nous posons alors $\Omega(0) = \Omega$ et $\Omega(1) = \hat{P}(\omega)$. Ensuite, $\Omega(n+1)$ est donné par $\Omega(n)$ moins tous les états dont il est devenu de connaissance commune, à l'étape n, qu'ils ne peuvent pas être l'état réalisé. Nous avons ainsi affaire à un univers contractant – une suite de $\Omega(0), \Omega(1), \Omega(2)\ldots, \Omega(N)$ telle que $\Omega(N+1) \subset \Omega(N)$. A partir d'un certain rang N, les individus n'arriverons plus à écarter aucun état en connaissance commune, quel que soit l'individu qui annonce sa probabilité actualisée, c'est-à-dire $\Omega(N+2) = \Omega(N+1) = \Omega(N)$. Nous dirons alors que le processus s'est terminé à la N-ième étape.

Plus formellement :

$\Omega_0 = \Omega$,
Etape 1 : $\Omega_1 = \hat{P}(\omega^\star)$, calculé normalement étant donné $\Omega_0 = \Omega$,
Etape t : $\Omega_n = \Omega_{n-1} \backslash \bar{\mathscr{P}}_{i(t-1),t-1}$, sachant que

$$\bar{\mathscr{P}}_{i(t),t} = \bigcup_{i(t),k} P_{i(t),k}, \text{ tel que } P_{i(t),k} \in \mathscr{P}_{i(t)} \text{ et } \frac{p(A \cap P_{i(t),k} \cap \Omega(t))}{p(P_{i(t),k} \cap \Omega(t))} \neq q_{i(t),t},$$

$$q_{i,t} = \frac{p(A \cap P_i(\omega) \cap \Omega(t))}{p(P_i(\omega) \cap \Omega(t))}$$

et $i(t)$ est donné par la suite $1, 2, 1, 2, \ldots$ si c'est l'individu 1 qui commence ; par $2, 1, 2, 1 \ldots$ si c'est l'individu 2 qui commence.

Cette manière de définir le processus diffère légèrement de celle donnée par Geanakoplos et Polemarchakis (1982). Geanakoplos et Polemarchakis (1982) définissent le processus à la base de l'ensemble des classes de la partition de l'individu 1, respectivement 2, qui restent compatibles, à l'étape n, avec les annonces faites jusqu'à l'étape n *mais sans éliminer à l'étape initiale tous les états en dehors de la classe de la partition fondue à laquelle appartient l'état réalisé.*

Une observation est immédiate. Si les conditions d'Aumann sont satisfaites, le processus se termine tout de suite, avec la première étape : bien évidemment, puisque dans ce cas, les probabilités a posteriori sont déjà de connaissance commune (naturellement grâce à la connaissance commune des partitions d'information individuelles) et alors les individus n'apprennent plus rien par l'annonce de l'autre au delà de ce qu'ils savent déjà grâce à la connaissance commune de leurs partitions d'information. Voyons-le dans l'exemple 2.

Exemple 2 – suite

On se souvient :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \{\{a,b\},\{c,d\},\{e\},\{f\}\}, \\ \mathscr{P}_2 &= \{\{d,b\},\{c,a\},\{e,f\}\}, \\ \hat{\mathscr{P}} &= \{\{a,b,c,d\},\{e,f\}\}. \end{aligned}$$

Comme avant, supposons que l'on s'intéresse à l'événement $A = \{b,c\}$ et que c'est l'état a qui s'est réalisé. Ici la classe de la partition fondue à laquelle appartient l'état réalisé est $\hat{P}(\omega) = \{a,b,c,d\}$. Le fait que l'état réalisé ne peut pas se trouver *en dehors* de cet ensemble est tout de suite de connaissance commune entre les deux individus, tout simplement par le fait que les deux partitions d'information sont de connaissance commune, et, ajoutons-le, en vertu de la connaissance commune que l'un des états s'est effectivement réalisé et que les deux individus ont chacun reçu l'information sur l'état réalisé selon leur partition d'information. Alors, $\Omega(1) = \hat{P}(\omega) = \{a,b,c,d\}$.

Imaginons maintenant que les deux individus s'annoncent tour à tour leurs probabilités actualisées par rapport à l'événement A. On s'aperçoit très vite : quel que soit l'individu qui commence, son annonce de $1/2$ ne va rien apprendre à l'autre et ne va pas leur permettre d'écarter aucune partie des états du monde possibles Ω au delà de ce qu'ils peuvent déjà écarter en connaissance commune tout simplement en exploitant l'information que chacun d'eux a reçue selon sa partition d'information et le fait que les partitions d'information sont de connaissance commune. Imaginons que c'est l'individu 1 qui commence et qui annonce alors à l'individu 2 : « Selon mes informations, la probabilité a posteriori de $A = \{b,c\}$ est de $1/2$ ». L'individu 2 peut être imaginé de répondre comme suit : « Très bien, vous m'annoncez $1/2$. Mais je sais déjà que c'était ce que vous alliez me dire ; et par ailleurs vous savez très bien que je le sais, et vous savez que je sais que vous savez que je le sais, etc. En fait, nous savons très bien tous les deux – et ceci est effectivement de connaissance commune entre nous – que le vrai état du monde appartient à $\{a,b,c,d\}$. Certainement, je ne sais pas si vous avez reçu l'information que le vrai état appartient à $\{a,b\}$ ou à $\{c,d\}$. Mais quel que soit le cas, vous arriveriez toujours à une probabilité a posteriori de A de $1/2$.

Et inversement, je sais très bien que vous savez que moi, de mon côté, j'ai reçu l'information que le vrai état appartient à $\{d, b\}$ ou à $\{c, a\}$ et que je vais alors aussi annoncer 1/2, et vous savez que je sais que vous le savez, etc. A quoi bon alors de se parler ? »

Etudions donc la question dans un exemple dans lequel les conditions d'Aumann *ne sont pas satisfaites.*

Exemple 3 – suite

On se souvient :

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \{\{a,b\},\{c,e\},\{d,f,g\}\}, \\ \mathscr{P}_2 &= \{\{a\},\{b,c,d\},\{e,f,g\}\}, \\ \hat{\mathscr{P}} &= \{\{a,b,c,d,e,f,g\}\}. \end{aligned}$$

Comme avant, soit $A = \{b, e\}$ l'événement qui intéresse, et b l'état réalisé. Si les individus calculent chacun la probabilité a posteriori de $A = \{b, e\}$ en exploitant l'information obtenue grâce à leurs partitions d'information individuelles, l'individu 1 attribuera à A une probabilité a posteriori de 1/2, et l'individu 2 de 1/3. Mais qu'est-ce qui se passe si les deux se communiquent tour à tour leurs probabilités a posteriori ?

Etape 0 : remarquons tout d'abord qu'ici la partition fondue n'a qu'un seul élément, $\hat{\mathscr{P}} = \{\Omega\}$; ainsi $\hat{P}(b) = \Omega$, et puis $\Omega_1 = \Omega_0 = \Omega$.

Etape 1 : supposons que c'est l'individu 2 qui commence. L'individu 2 annonce alors à l'individu 1 : « J'ai trouvé comme probabilité a posteriori de A : 1/3. » L'individu 1 va en tirer la conclusion que a ne peut pas être l'état réalisé. Pourquoi ? Parce-que $\{a\}$ est la seule classe de la partition d'information de l'individu 2 qui *ne conduit pas* à une probabilité a posteriori de A de 1/3 : si l'individu 2 avait reçu l'information $\{a\}$, la réponse aurait été 0. Cependant la restriction des états du monde possibles à $\{b, c, d\}$ aussi bien qu'à $\{e, f, g\}$ donne 1/3. [2] Selon l'hypothèse que les partitions d'information des individus sont de connaissance commune, l'annonce de « 1/3 » par l'individu 2 revient alors à le rendre de connaissance commune que a ne peut pas être l'état réalisé. Par conséquent, $\{a\}$ peut être écarté *en connaissance commune* de l'ensemble des états du monde possibles, et ce qui reste dans le fond des états du monde possibles qui *ne peuvent pas être exclus en connaissance commune* est : $\Omega(2) = \Omega(1)\backslash\{a\} = \{b, c, d, e, f, g\}$.

Etape 2 : l'individu 1 peut-elle en déduire quelque chose au delà de ce qu'elle savait déjà grâce à sa partition d'information individuelle ? Oui, et ceci sera de conséquence. L'individu 1 sait déjà que l'état réalise est soit a soit b. Si elle apprend maintenant que a ne s'est pas

2. On peut aussi imaginer l'individu 1 raisonner comme suit : je sais que l'état réalisé est soit a, soit b. Si l'état réalisé était a, l'individu 2 aurait rapporté « 0 ». Si l'état réalisé était b, l'individu 2 aurait rapporté « 1/3 ». C'est exactement ce qu'il a dit. Donc, je peux écarter a.

réalisé, elle sait alors que l'état réalisé est b et puis que l'événement $A = \{b, e\}$ ne s'est sûrement pas réalisé. Plus formellement, l'individu 1 a fait le calcul suivant :

$$\frac{p[\{\overbrace{b, e}^{A}\} \cap \{\overbrace{a, b}^{P_1(b)}\} \cap \overbrace{(\{\overbrace{b, c, d}^{P_{2k}\to 1/3}\} \cup \{\overbrace{e, f, g}^{P_{2k}\to 1/3}\})}^{\Omega(2)=\{b,c,d,e,f,g\}}]}{p(\{a, b\} \cap \{b, c, d, e, f, g\})} = \frac{p(\{b\})}{p(\{b\})} \quad = \quad 1.$$

En d'autres termes : grâce à l'annonce de l'individu 2, l'individu 1 a pu écarter une partie de l'ensemble fondamental Ω, en l'occurrence $\{a\}$ – ce qui est en effet de connaissance commune entre les deux individus – et refaire alors son calcul de la probabilité a posteriori de $A = \{b, e\}$ avec sa partition d'information induite sur ce nouvel ensemble fondamental $\Omega(2) = \Omega\backslash\{a\} = \{b, c, d, e, f, g\}$. L'individu 1 annonce alors à 2 : « 1 ». Cette annonce de l'individu 1, à son tour, revient à le rendre de connaissance commune que l'état réalisé ne peut ni appartenir à $\{c, e\}$ ni à $\{d, f, g\}$: certainement, puisque connaissant la partition d'information de l'individu 1 induite par $\Omega(2)$,

$$\mathscr{P}_{1,\Omega(2)} \quad = \quad \{\{b\}, \{c, e\}, \{d, f, g\}\},$$

la probabilité a posteriori de 1 n'est compatible ni avec $\{c, e\}$ ni avec $\{d, f, g\}$.[3] Alors, $\Omega(3) = \Omega(2)\backslash\{c, e, d, f, g\} = \{b\}$.

Etape 3 : l'individu 2 sait alors que l'état réalisé est b et que A s'est sûrement réalisé. Les partitions d'informations et les annonces successives des individus étant de connaissance commune, cela est en fait de connaissance commune. Plus formellement l'individu 2 fait le calcul suivant :

$$\frac{p[\{\overbrace{b, e}^{A}\} \cap (\{\overbrace{b, c, d}^{P_2(b)}\} \cap \overbrace{\{b\}}^{\Omega(3)})]}{p[\{b, c, d\} \cap \{b\}]} = \frac{p(\{b\})]}{p(\{b\})} \quad = \quad 1.$$

Après seulement deux étapes de cet échange des probabilités actualisées il devient alors de connaissance commune entre les deux individus que l'état réalisé est b, que l'événement

3. On peut aussi imaginer l'individu 2 raisonner comme suit : je sais que l'état réalisé est soit b, soit c, soit d.

— Si l'état réalisé était b, l'individu 1 aurait pensé possible $\{a, b\}$. En connaissance de mon annonce et de ma partition d'information, elle aurait conclu que j'ai reçu l'information que l'état réalisé appartenait à $\{b, c, d\}$. (Puisqu'elle sait que ça n'aurait pas pu être a puisque dans ce cas-là, j'aurais annoncé 0.) Elle aurait alors pu exclure a et elle aurait annoncé 1, comme elle l'a fait d'ailleurs.

— Si l'état réalisé était c, elle aurait pensé possible $\{c, e\}$ et elle aurait alors pensé que je pensais possible $\{b, c, d\}$ ou $\{e, f, g\}$. Dans les deux cas je serais arrivé à 1/3. Mais cette information ne lui aurait pas permis d'écarter ni c ni e. Donc elle aurait annoncé 1/2.

— Si l'état réalisé était d, elle aurait pensé possible $\{d, f, g\}$ et, en fait, indépendamment de mon annonce, elle aurait déjà su que A ne s'est sûrement pas réalisé et elle aurait alors annoncé 0.

Je sais alors que c'est bien b qui s'est réalisé.

$A = \{b, e\}$ s'est alors sûrement réalisé et que les deux vont attribuer à A une probabilité a posteriori de 1.

La trace visible de ce processus de communication indirecte – de ce *dialogue bayésien* comme l'on peut dire – est la suite des probabilités actualisées annoncées aux étapes respectives :

Etape 1 : $q_2 = 1/3$
Etape 2 : $q_1 = 1$
Etape 3 : $q_2 = 1$

4.2 Propriétés

4.2.1 Un fondement dynamique du théorème d'Aumann

On peut montrer qu'un tel processus converge toujours, dans un nombre fini de pas, vers une situation dans laquelle les probabilités a posteriori des individus sont de connaissance commune et alors – force du théorème d'Aumann – identiques (Geanakoplos et Polemarchakis 1982). Ce résultat donne un fondement dynamique au résultat d'Aumann. Ainsi l'étude de Geanakoplos et Polemarchakis (1982) met en évidence : il est possible d'être un désaccord, c'est-à-dire, que les probabilités a posteriori ne sont pas de connaissance commune et alors pas forcement identiques. Mais si les individus se communiquent leurs probabilités actualisées tour à tour et en tirent les conclusions selon la logique bayésienne, alors : « On ne peut pas être en désaccord à toujours » (« We can't disagree forever »), comme l'annonce le titre de leur article.

4.2.2 Le « fond de la connaissance commune »

La trace visible du processus de communication indirecte à la Geanakoplos et Polemarchakis (1982) est la suite des probabilités a posteriori annoncées à chaque étape, tour à tour, par les deux individus. Or ce qui se passe en arrière-plan, c'est qu'à chaque étape, les individus ont *en connaissance commune* écarté une partie de l'ensemble des états du monde possibles, au delà des états qui n'appartiennent pas à la classe de la partition fondue à laquelle appartient le vrai état. Ce qui reste, à chaque étape, *l'ensemble des états du monde possibles dont il n'est pas devenu de connaissance commune qu'ils ne peuvent pas être l'état réalisé*, ce que nous notons $\Omega(n)$, joue le rôle d'un nouvel ensemble fondamental. Reprenant un terme que l'on trouve chez Geanakoplos et Polemarchakis (1982), nous nous référons aussi à $\Omega(n)$ comme *le fond de la connaissance commune* (the fund of common knowledge) à l'étape n.[4]

4. Geanakoplos et Polemarchakis (1982, p. 196) utilisent ce terme – the *fund of common knowledge* – en passant pour se référer à l'ensemble des classes de la partition de l'individu 1, respectivement 2, qui restent compatibles, à l'étape n, avec les annonces faites jusqu'à l'étape n, mais – et ceci reflète la différence entre

Au niveau des individus, tout se passe comme si à chaque étape ils se trouvaient devant un nouveau problème de recherche de la probabilité a posteriori de A avec l'ensemble fondamental $\Omega(n)$ et les partitions d'information $\mathscr{P}_i$ *induites par* $\Omega(n)$, ce que nous notons $\mathscr{P}_{i,\Omega(n)}$.

Dans l'exemple 3 :

$\Omega(1) = \Omega$: $\mathscr{P}_{1,\Omega(1)} = \{\{a,b\},\{c,e\},\{d,f,g\}\}$
$\mathscr{P}_{2,\Omega(1)} = \{\{a\},\{b,c,d\},\{e,f,g\}\} \rightarrow q_2 = \frac{1}{3}$
$\rightarrow \{a\}$ écarté en connaissance commune

$\Omega(2) = \Omega \backslash \{a\}$: $\mathscr{P}_{1,\Omega(2)} = \{\{a,b\},\{c,e\},\{d,f,g\}\} \rightarrow q_1 = 1$
$\mathscr{P}_{2,\Omega(2)} = \{\{a\},\{b,c,d\},\{e,f,g\}\}$
$\rightarrow \{c,e\} \cup \{d,f,g\}$ écartés en connaissance commune

$\Omega(3) = \{b\}$: $\mathscr{P}_{1,\Omega(3)} = \{\{a,b\},\{c,e\},\{d,f,g\}\}$
$\mathscr{P}_{2,\Omega(3)} = \{\{a\},\{b,c,d\},\{e,f,g\}\} \rightarrow q_2 = 1$

A chaque étape, le fond de la connaissance commune $\Omega(n)$ et les partitions d'information induites par $\Omega(n)$, les $\mathscr{P}_{i,\Omega(n)}$, $i = 1,2$, sont de nouveau de connaissance commune – bien évidemment, puisque ces données ont été construites à partir des données qui sont de connaissance commune : les partitions d'information et la probabilité a posteriori annoncée à l'étape précédente.

4.2.3 La communication indirecte se termine toujours avec les conditions d'Aumann

Dans l'exemple 3, à la fin du processus, les individus arrivent à connaître le vrai état du monde qui s'est réalisé (b en l'occurrence). Or, ce n'est pas nécessairement le cas. Le processus peut s'arrêter avec un sous-ensemble de Ω avec plus qu'un état. En effet, nous avons déjà rencontré ce phénomène – dans l'exemple 2. L'exemple 2, certes, a la propriété particulière que le processus s'arrête toute suite après la première étape, puisque sur la classe de la partition fondue à laquelle appartient le vrai état, $\hat{P}(\omega)$, les conditions d'Aumann sont satisfaites. Il est aussi possible que le processus de communication indirecte élimine effectivement quelques états appartenant à $\hat{P}(\omega) = \Omega(1)$ avant qu'il s'arrête avec un sous-ensemble de $\hat{P}(\omega)$ avec plus qu'un état sur lequel les conditions d'Aumann sont satisfaites. L'exemple 5 le montrera.

Ce qui reste vrai toujours, comme le montre Geanakoplos et Polemarchakis, c'est que *le processus s'arrête avec un sous-ensemble de Ω sur lequel les conditions d'Aumann sont satisfaites* – sur lequel les probabilités a posteriori des deux individus sont de connaissance

leur manière de définir le processus et la nôtre – sans avoir éliminé tout au début tous les états en dehors de la classe de la partition fondue à laquelle appartient l'état réalisé.

commune et alors égales, grâce à la connaissance commune de leurs partitions d'informations induites sur ce sous-ensemble de Ω.

4.2.4 La communication indirecte peut diverger de la communication directe

L'exemple 3 a aussi la propriété particulière que la probabilité a posteriori de A trouvée à la fin du processus de communication indirecte à travers la probabilités actualisées est identique à la probabilité a posteriori de A étant donnée l'information apportée par la partition croisée, c'est à dire la probabilité a posteriori de A qui aurait résulté de la communication directe des informations reçues selon les partitions d'information individuelles. Ceci n'est pas pour autant nécessairement le cas. L'exemple 5 le montrera également.

4.2.5 L'ordre joue un rôle

L'exemple 3 a une troisième particularité : indépendamment de qui commence le processus, le processus se termine toujours avec le même fond de la connaissance commune – le même sous-ensemble de Ω dont les individus n'arrivent plus à écarter quoi que ce soit – et par conséquent à la même probabilité a posteriori que les deux individus attribuent en connaissance commune à l'événement A. Ceci n'est pour autant pas toujours le cas. Il se peut qu'en fonction de qui commence le processus, celui-ci se termine avec deux sous-ensembles de Ω différents – sur chacun d'eux, comme il le faut toutefois, les conditions d'Aumann sont respectées. Là, encore une fois, l'exemple 5 en sera une démonstration.

Exemple 5

Soient $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$, et $p(\omega) = 1/11$ pour tous les événements élémentaires,

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \{\{a, b, c, d, e, f\}, \{g, h, i, j, k\}\}, \\ \mathscr{P}_2 &= \{\{a, b, g, h\}, \{c, d, i, j\}, \{e, f, k\}\}, \end{aligned}$$

$A = \{a, b, i, j, k\}$, et $\omega^\star = a$. L'exemple est une variante d'un exemple donné par Polemarchakis (2016, 12).[5] Ici, encore une fois, nous sommes dans le cas où la partition fondue est la plus grossière $\hat{\mathscr{P}} = \{\Omega\}$. La classe de la partition fondue contenant le vrai état est alors Ω lui-même, $\hat{P}(a) = \Omega$, et le processus commence avec $\Omega(1) = \Omega$.

5. Chez Polemarchakis il apparaît avec un ensemble fondamental avec seulement 6 états avec des probabilités a priori différentes. Ici on a tout simplement porté l'exemple de Polemarchakis à un modèle avec une loi de probabilité a priori uniforme sur l'ensemble d'états du mondes possibles.

Ici, comme le montre Polemarchakis, l'ordre de la communication indirecte joue un rôle :

— *Si c'est l'individu 1 qui commence* :

A l'étape 1 : $\Omega(1) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$,
$\mathscr{P}_{1,\Omega(1)} = \{\{a, b, c, d, e, f\}, \{g, h, i, j, k\}\}$, et alors :

$$q_1 = \frac{p(\{a, b, i, j, k\} \cap \{a, b, c, d, e, f\})}{p(\{a, b, c, d, e, f\})} = \frac{p(\{a, b\})}{p(\{a, b, c, d, e, f\})} = \frac{1}{3},$$

ce qui implique que $\{g, h, i, j, k\}$ peut être écarté en connaissance commune.

A l'étape 2 : $\Omega(2) = \{a, b, c, d, e, f\}$,
$\mathscr{P}_{2,\Omega(2)} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$,

$$q_2 = \frac{p(\{a, b\} \cap \{a, b\})}{p(\{a, b\})} = \frac{p(\{a, b\})}{p(\{a, b\})} = 1,$$

ce qui implique que $\{c, d, e, f\}$ peut être écarté en connaissance commune.

A l'étape 3 : $\Omega(3) = \{a, b\}$, $\mathscr{P}_{1,\Omega(3)} = \{\{a, b\}\}$, et l'individu 1 annoncera alors aussi : « 1 ».

Sur ce qui reste, $\Omega(3) = \{a, b\}$, les conditions d'Aumann sont satisfaites – de manière triviale puisque les partitions d'information des deux individus induites par $\{a, b\}$ sont les mêmes :

$$\mathscr{P}_{1,\Omega(3)} = \{\{a, b\}\} = \mathscr{P}_{2,\Omega(3)}.$$

Dans cet exemple, l'élément de la partition croisée auquel appartient l'état réalisé a est également $\{a, b\}$. La communication directe amènera alors aussi à une probabilité a posteriori de l'événement A de 1.

— *Mais si c'est l'individu 2 qui commence* :

A l'étape 1 : $\Omega(1) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$,
$\mathscr{P}_{2,\Omega(1)} = \{\{a, b, g, h\}, \{c, d, i, j\}, \{e, f, k\}\}$,

$$q_1 = \frac{p(\{a, b, i, j, k\} \cap \{a, b, g, h\})}{p(\{a, b, g, h\})} = \frac{p(\{a, b\})}{p(\{a, b, g, h\})} = \frac{1}{2},$$

ce qui implique que $\{e, f, k\}$ peut être écarté en connaissance comme.

A l'étape 2 : $\Omega(2) = \{a, b, c, d, g, h, i, j\}$,
$\mathscr{P}_{1,\Omega(2)} = \{\{a, b, c, d\}, \{g, h, i, j\}\}$,

$$q_2 = \frac{p(\{a,b,i,j\} \cap \{a,b,c,d\})}{p(\{a,b,c,d\})} = \frac{p(\{a,b\})}{p(\{a,b,c,d\})} = \frac{1}{2}.$$

Plus rien ne peut être écarté en connaissance comme.

Ensuite, étant donné $\Omega(3) = \{a,b,c,d,g,h,i,j\}$ et $\mathscr{P}_{2,\Omega(3)} = \{\{a,b,g,h\},\{c,d,i,j\}\}$, l'individu 2, s'il suit le procédé bayésien prescrit par Geanakoplos et Polemarchakis, ne pourra que répéter « 1/2 » ce qui n'apportera aucune nouvelle à l'individu 1 ; et ainsi de suite. Le processus est arrivé à sa fin. Sur les deux partitions d'informations qui restent,

$$\mathscr{P}_{1,\Omega(3)} = \{\{a,b,c,d\},\{g,h,i,j\}\},\ \mathscr{P}_{2,\Omega(3)} = \{\{a,b,g,h\},\{c,d,i,j\}\},$$

par rapport à l'événement $A = \{a,b,i,j,k\}$, ou bien ce qui reste de l'événement A à cette étape, $A = \{a,b,i,j\}$, comme il le faut, les conditions d'Aumann sont satisfaites :

$$\frac{p(\{a,b,i,j\} \cap \{a,b,c,d\})}{p(\{a,b,c,d\})} = \frac{1}{2} = \frac{p(\{a,b,i,j\} \cap \{a,b,g,h\})}{p(\{a,b,g,h\})}.$$

L'exemple 5 illustre alors trois propriétés importantes du processus de communication indirecte :

- le processus ne va pas nécessairement faire connaître aux individus l'état exact qui s'est réalisé,
- n'amène pas nécessairement au même résultat que la communication directe, mais peut s'arrêter avant que la classe de la partition croisée auquel appartient le vrai état soit atteinte (ce qui arrête le processus, on le voit très bien dans l'exemple 5, sont les conditions d'Aumann), et
- dépend de l'ordre.

4.2.6 Une annonce publique peut bloquer ou bien débloquer le processus de la communication indirecte

Exemple 6

Soient $\Omega = \{a,b,c,d,e,f\}$, et $p(\omega) = 1/6$ pour tous les événements élémentaires,

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &= \{\{a,b\},\{c,d,f\},\{e\}\}, \\ \mathscr{P}_2 &= \{\{a,c\},\{b,d,e\},\{f\}\}, \end{aligned}$$

$A = \{a, d\}$, et $\omega^\star = a$. Cet exemple est aussi une variante d'un exemple donné par Polemarchakis (2016).[6] Ici la partition fondue est également la partition la plus grossière $\hat{\mathscr{P}} = \{\Omega\}$. Ainsi $\hat{P}(a) = \Omega$, et puis $\Omega(1) = \Omega$. Ici la communication indirecte, quel que soit l'individu qui commence le processus – on le vérifie facilement – va réduire l'ensemble fondamental à l'état réalisé, $\{a\}$, et les deux individus vont alors savoir en connaissance commune que l'événement $A = \{a, d\}$ s'est sûrement réalisé.

Suivant Polemarchakis, imaginons cependant qu'avant le début du processus une autorité annonce publiquement que ni e ni f est le vrai état. Après cette annonce, on aura un ensemble fondamental modifié $\Omega' = \{a, b, c, d\}$. Etant donné les partitions des individus induites par ce nouvel ensemble fondamental,

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_{1,\Omega'} &= \{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \\ \mathscr{P}_{2,\Omega'} &= \{\{a, c\}, \{b, d\ \}, \end{aligned}$$

les conditions d'Aumann sont satisfaites : les deux individus arrivent à une probabilité actualisée de A de $1/2$, et ceci est de connaissance commune entre les deux. Mais cela veut dire qu'à partir de cette situation, même si les deux individus se communiquent leurs probabilités actualisées, ils n'arriveront plus à écarter d'autres parties de l'ensemble fondamental : le processus est bloqué dès le début avec l'ensemble fondamental réduit à $\Omega' = \{a, b, c, d\}$ et la probabilité actualisée de $1/2$ attribuée à A en connaissance commune – ce qui est, remarquons-le, moins exact que la connaissance commune sur A qu'il pourraient atteindre par communication indirecte à partir de la situation originelle.

Remarquons également que annonce publique « ni e ni f est le vrai état du monde » porte sur un fait *dont chacun des deux individus a déjà connaissance individuellement, en vertu de sa partition d'information*. En revanche, que tous les deux ont déjà connaissance de ce fait *n'est pas de connaissance commune*. L'effet de cette annonce publique est justement de rendre ce fait de connaissance commune. Mais la conséquence est fatale : puisque c'est justement la connaissance commune de ce fait qui les jette dans cette situation à partir de laquelle la communication indirecte à travers les probabilités actualisées est impuissante.

Certes, une annonce publique peut aussi avoir l'effet contraire : elle peut débloquer le processus si celui-ci se trouve bloqué dans une situation Aumannienne. Pour reprendre l'exemple en haut, imaginons qu'après la première annonce publique (après un certain laps de temps si on veut) une deuxième annonce proclame : « d n'est pas le vrai état du monde non plus. » Cette annonce, elle aussi, porte sur un fait dont tous les deux ont déjà connaissance individuellement, en vertu de leurs partitions d'information individuelles. Mais cette fois-ci le fait que ces connaissances sont portées au niveau d'une connaissance commune va permettre aux individus par la suite de tirer des informations conséquentes de leurs annonces des probabilités actualisées concernant l'événement A : quel que soit l'individu qui reprend le processus après cette deuxième annonce, il ou elle va dire « 1/2 ».

6. Ici, comme pour l'exemple 5, la seule différence est que nous l'avons porté à un modèle d'équiprobabilité.

Cette annonce va permettre à l'autre de conclure que le vrai état du monde est a. Il ou elle va alors annoncer « 1 », et cette annonce va permettre au premier de conclure, à son tour, que a est le vrai état du monde, et que A s'est alors sûrement réalisé.

En résumé : une annonce publique peut aller dans les deux sens : elle peut « arrêter » ou « débloquer » le processus de la communication indirecte ; ce qui « arrête » ou « bloque » le processus à chaque fois ce sont les conditions Aumanniennes.

4.2.7 La répétition : répéter la même chose ne veut pas dire que rien ne soit communiqué

La condition terminale du processus définie par Geanakoplos et Polemarchakis – il est important de le souligner – n'est pas que les deux individus répètent la probabilité a posteriori de l'étape précédente, mais qu'ils n'arrivent plus à écarter aucune partie de $\Omega(n)$, l'ensemble des états dont il n'est pas de connaissance commune qu'ils ne peuvent pas être l'état réalisé. Il se peut qu'il ne se passe rien au niveau des croyances annoncées pendant un certain nombres d'étapes, c'est-à-dire que les individus répètent ce qu'ils ont dit précédemment, alors qu'en arrière-plan les individus arrivent quand même à écarter de plus en plus d'états dont il est devenu de connaissance commune qu'ils ne peuvent pas être l'état réalisé. L'exemple suivant, du à Aumann, le montrera.

Exemple 7

L'exemple suivant est le cas particulier $n = 3$ d'après un exemple paramétrique (pour tout n entier positif) que l'on trouve chez Geanakoplos et Polemarchakis (1982, 197) et que ceux-ci attribuent à Aumann – l'exemple sur lequel nous sommes tombé dans le chapitre 2.5.5 en prolongeant un exemple donné par Aumann en 1976.

Soient $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ et $p(\omega) = 1/9$ pour tous les événements élémentaires. Supposons que :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_1 &= \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{g, h, i\}\},\\ \mathscr{P}_2 &= \{\{a, b, c, d\}, \{e, f, g, h\}, \{i\}\},\end{aligned}$$

$A = \{a, e, i\}$, et $\omega^\star = a$.

Supposons que c'est l'individu 1 qui commence le processus de communication indirecte à travers les probabilités actualisées.

A l'étape 1 : $\Omega(1) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $\mathscr{P}_{1,\Omega(1)} = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{g, h, i\}\}$,

$$q_1 = \frac{p(\{a, e, i\} \cap \{a, b, c\})}{p(\{a, b, c\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{a, b, c\})} = \frac{1}{3}$$

Rien ne peut être écarté en connaissance commune.

A l'étape 2 : $\Omega(2) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $\mathscr{P}_{2,\Omega(2)} = \{\{a, b, c, d\}, \{e, f, g, h\}, \{i\}\}$,

$$q_2 = \frac{p(\{a, e, i\} \cap \{a, b, c, d\})}{p(\{a, b, c, d\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{a, b, c, d\})} = \frac{1}{4}$$

Cette annonce de l'individu 2 permet d'écarter $\{i\}$ en connaissance commune ; puisque $\{i\}$ aurait produit l'annonce $q_2 = 1$.

A l'étape 3 : $\Omega(3) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $\mathscr{P}_{1,\Omega(3)} = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{g, h\}\}$,

$$q_1 = \frac{p(\{a, e, i\} \cap \{a, b, c\})}{p(\{a, b, c\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{a, b, c\})} = \frac{1}{3}$$

Cette annonce de l'individu 1 permet d'écarter $\{g, h\}$ en connaissance commune ; puisque $\{g, h\}$ aurait produit l'annonce $q_1 = 0$.

A l'étape 4 : $\Omega(4) = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathscr{P}_{2,\Omega(4)} = \{\{a, b, c, d\}, \{e, f\}\}$,

$$q_2 = \frac{p(\{a, e, i\} \cap \{a, b, c, d\})}{p(\{a, b, c, d\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{a, b, c, d\})} = \frac{1}{4}$$

Cette annonce de l'individu 2 permet d'écarter $\{e, f\}$ en connaissance commune ; puisque $\{e, f\}$ aurait produit l'annonce $q_2 = 1/2$.

A l'étape 5 : $\Omega(5) = \{a, b, c, d\}$, $\mathscr{P}_{1,\Omega(5)} = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$,

$$q_1 = \frac{p(\{a, e, i\} \cap \{a, b, c\})}{p(\{a, b, c\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{a, b, c\})} = \frac{1}{3}$$

Cette annonce de l'individu 1 permet d'écarter $\{d\}$ en connaissance commune ; puisque $\{d\}$ aurait produit l'annonce $q_1 = 0$.

A l'étape 6 : $\Omega(6) = \{a, b, c\}$, $\mathscr{P}_{2,\Omega(6)} = \{\{a, b, c\}\}$,

$$q_2 = \frac{p(\{a, e, i\} \cap \{a, b, c\})}{p(\{a, b, c\})} = \frac{p(\{a\})}{p(\{a, b, c\})} = \frac{1}{3}$$

A partir de cette étape plus rien ne peut être écarté. Le processus de communication indirecte à travers les croyances a trouvé sa fin, son point fixe, si l'on veut. Les deux individus vont à toujours chacun répéter : « 1/3 ».

Dans cet exemple, la trace visible du processus de communication indirecte, la suite des probabilités actualisées, est :

Etape 1 : $q_1 = 1/3$
Etape 2 : $q_2 = 1/4$
Etape 3 : $q_1 = 1/3$
Etape 4 : $q_2 = 1/4$
Etape 5 : $q_1 = 1/3$
Etape 6 : $q_2 = 1/3$
–
Etape 7 : $q_2 = 1/3$
Etape 8 : $q_1 = 1/3$
$\vdots$

Pendant cinq périodes il ne se passe « rien » à la surface des choses ; les deux individus répètent chacun ce qu'ils ont dit auparavant, jusqu'à la sixième étape lorsque l'individu 2 annoncera aussi 1/3, ce qui terminera le processus, c'est-à-dire qu'à partir de ce moment-là ils vont à toujours répéter 1/3 tous les deux.

Dans la forme générale de cet exemple (voir le chapitre 2.5.5), pour chaque $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est à l'étape $2n$ que le processus s'arrête avec la probabilité de $1/n$ attribuée à A en connaissance commune.

4.2.8 Dire ce que tout le monde sait déjà

L'exemple 7 a une autre propriété intéressante : les choses commencent à bouger avec un acte de parole (l'annonce de « 1/n+1 » de l'individu 2 à la deuxième étape) qui revient à dire quelque chose dont tous les deux ont déjà connaissance individuellement : que le vrai état ne peut pas être le « dernier » état (i, si $n = 3$). Chacun des deux individus le sait déjà : bien évidemment, puisque l'individu 1 sait que le vrai état appartient aux n « premiers » états et l'individu 2 sait que le vrai état appartient aux $n+1$ « premiers » états. Or ce qui se passe par l'annonce de l'individu 2 c'est que ce fait devient de *connaissance commune* entre les deux individus – ce qui va leur permettre d'écarter d'autres états grâce à l'annonce de l'individu 1 à l'étape suivante, et ainsi de suite. Cette opération se reproduit en effet à chaque étape jusqu'à l'avant-dernière étape : à chaque étape, sauf la dernière, les deux individus écartent des états dont tous les deux savaient déjà individuellement – avant l'annonce de l'étape actuelle – qu'ils ne pouvaient pas être l'état réalisé. Or, ces connaissances n'étaient pas de connaissance commune.

C'est le même phénomène que nous avons rencontré dans l'exemple 6 avec les annonces publiques : la fonction d'un acte de paroles, ou plus généralement d'un partage d'information, n'est pas seulement de procurer connaissance de certains faits mais d'établir un ordre supérieur sur les connaissances de ces faits ; ici, plus précisément, la connaissance commune de ces faits.

4.3 Une représentation alternative

Les modèles avec deux individus se prêtent à une représentation particulièrement pratique : on peut arranger les éléments de la partition croisée sous forme matricielle telle que l'un des individus ne peut distinguer que les lignes et l'autre que les colonnes de la matrice, avec quelques éléments de la matrice éventuellement inoccupés, mais sans laisser une ligne ou colonne parfaitement inoccupée.[7]

Cette représentation est particulièrement intuitive si la partition croisée est la partition la plus fine, c'est-à-dire si tout élément de la partition croisée ne contient qu'un seul état, comme c'est le cas dans les exemples 2, 4 et 6. Si la partition croisée comporte des classes contenant plus qu'un état, la seule chose qui change c'est bien celle-là : les éléments de la matrice représentant les deux partitions sont des sous-ensembles de Ω avec éventuellement plus qu'un état.

Exemple 1 – représentation alternative

$$\begin{array}{cc|c} \{a^\star, b\} & \{c, d\} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Exemple 2 – représentation alternative

$$\begin{array}{ccc|c} \{a^\star\} & \{\mathbf{b}\} & & \frac{1}{2} \\ \{\mathbf{c}\} & \{d\} & & \frac{1}{2} \\ & & \{e\} & 0 \\ & & \{f\} & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \end{array}$$

Exemple 3 – représentation alternative

7. Voir, par exemple, Barbut (1968).

$$
\begin{array}{ccc|c}
\{a\} & \{\mathbf{b}^\star\} & & \frac{1}{2} \\
& \{c\} & \{\mathbf{e}\} & \frac{1}{2} \\
& \{d\} & \{f, g\} & 0 \\
\hline
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} &
\end{array}
$$

Exemple 4 – représentation alternative

$$
\begin{array}{cc|c}
\{\mathbf{a}^\star\} & \{b\} & \frac{1}{2} \\
\{c\} & \{d\} & 0 \\
\hline
\frac{1}{2} & 0 &
\end{array}
$$

Exemple 5 – représentation alternative

$$
\begin{array}{ccc|c}
\{\mathbf{a}^\star, \mathbf{b}\} & \{c, d\} & \{e, f\} & \frac{1}{3} \\
\{g, h\} & \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} & \{\mathbf{k}\} & \frac{3}{5} \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} &
\end{array}
$$

Exemple 6 – représentation alternative

$$
\begin{array}{ccc|c}
\{\mathbf{a}^\star\} & \{b\} & & \frac{1}{2} \\
\{c\} & \{\mathbf{d}\} & \{f\} & \frac{1}{3} \\
& \{e\} & & 0 \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 &
\end{array}
$$

Exemple 7 – représentation alternative

$$\begin{array}{ccc|c}
\{\mathbf{a}^\star, b, c\} & & & \frac{1}{3} \\
\{d\} & \{\mathbf{e}, f\} & & \frac{1}{3} \\
 & \{g, h\} & \{\mathbf{i}\} & \frac{1}{3} \\
\hline
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 &
\end{array}$$

Dans les schémas que nous employons : la partition d'information de l'individu 1 est représentée par les lignes, celle de l'individu 2 par les colonnes ; les états appartenant à l'événement A sont marqués en gras ; l'état réalisé est marqué par une étoile ; les entrées à droite de la ligne horizontale, respectivement en bas de la ligne verticale, montrent les probabilités conditionnelles de A sachant que l'état réalisé se trouve dans la ligne, voire la colonne respective.

Sous cette forme matricielle – cette *forme croisée* – d'écrire les deux partitions on identifie facilement les classes de la partition fondue : ce sont les sous-matrices dont les éléments sont liés par une relation « voisin direct horizontal » ou « voisin direct vertical » et dont les lignes et colonnes en dehors de la sous-matrice en question restent vides. Dans l'exemple 2 :

$$\begin{array}{cc}
\{a^\star\} & \{\mathbf{b}\} \\
\{\mathbf{c}\} & \{d\}
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{c}
\{e\} \\
\{f\}
\end{array}$$

Dans tous les autres exemples que nous avons vus jusqu'à présent, il se trouve que la partition fondue est la partition la plus grossière, $\{\Omega\}$, et alors la partition fondue n'a qu'un seul élément qui est représenté par la matrice toute entière.

Sous cette forme matricielle, on vérifie rapidement si les conditions d'Aumann sont satisfaites : on détermine la sous-matrice correspondant à la classe de la partition fondue à laquelle appartient le vrai état : si pour cette sous-matrice, toutes les probabilités conditionnelles de A selon les lignes et selon les colonnes sont égales, alors les conditions d'Aumann sont satisfaites. On le voit clairement dans les exemples 1 et 2.

Le processus de communication indirecte s'analyse aussi facilement : on identifie d'abord la sous-matrice correspondant à la classe de la partition fondue à laquelle appartient l'état réalisé et on écarte tout le reste. Ensuite, les annonces des individus vont successivement éliminer des lignes, respectivement des colonnes de la matrice, potentiellement plusieurs à la fois : toutes les lignes, respectivement colonnes, qui ne donnent pas comme probabilité conditionnelle de A ce que l'individu dont c'est le tour vient d'annoncer. Certainement, les probabilités de A étant donné la ligne respectivement la colonne peuvent – et en général vont – changer d'une étape à l'autre.

Exemple 5 – représentation alternative – communication indirecte

Voyons le processus de communication indirecte sous sa forme matricielle dans l'exemple 5.

A l'étape 1 : $\Omega(1) = \hat{P}(a) = \Omega$ est donné par toute la matrice :

$$\begin{array}{ccc|c} \{\mathbf{a}^\star, \mathbf{b}\} & \{c, d\} & \{e, f\} & \frac{1}{3} \\ \{g, h\} & \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} & \{\mathbf{k}\} & \frac{3}{5} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \end{array}$$

Dans cet exemple, on se souvient, le résultat du processus dépend de l'ordre de communication. Si c'est l'individu 1 qui commence et annonce 1/3, à l'étape 2, la matrice sera donnée par :

$$\begin{array}{ccc|c} \{\mathbf{a}^\star, \mathbf{b}\} & \{c, d\} & \{e, f\} & \frac{1}{3} \\ \hline 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

Puis, après l'annonce de « 1 » par l'individu 2, à l'étape 3, le processus se terminera avec :

$$\begin{array}{c|c} \{\mathbf{a}^\star, \mathbf{b}\} & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Si, par contre, c'est l'individu 2 qui commence et annonce 1/2, à l'étape 2, la matrice sera donnée par :

$$\begin{array}{cc|c} \{\mathbf{a}^\star, \mathbf{b}\} & \{c, d\} & \frac{1}{2} \\ \{g, h\} & \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Et le processus s'arrête. On voit clairement que sur la matrice qui reste, les conditions d'Aumann sont satisfaites.

4.4 Toute suite de probabilités peut provenir d'un dialogue bayésien

Polemarchakis (2016) montre un résultat étonnant : n'importe quelle suite de probabilités $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_N$, avec des valeurs strictement entre 0 et 1, peut provenir d'un processus de communication indirecte à la Geanakoplos et Polemarchakis (1982), d'un *dialogue rationnel*, comme dit Polemarchakis. C'est-à-dire : quelle que soit la liste de croyances actualisées $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_N$, il existe un ensemble fondamental Ω, des partitions $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de Ω, un événement $A \subset \Omega$ et un $\omega \in \Omega$ tels que si $\omega \in \Omega$ se réalise et les individus se communiquent tour à tour leurs croyances actualisées, alors la trace visible de ce processus sera $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_N$.

Le résultat est remarquable puisqu'en dehors de la condition que les probabilités sont strictement entre 0 et 1, la suite $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_N$ n'est contrainte par aucune autre condition ; notamment aucune condition de monotonie, ni sur les éléments de $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_N$ ni sur les éléments des sous-suites $q_1, q_3, q_5, \ldots,$ ou $q_2, q_4, q_6, \ldots,$ s'impose.

Et ceci a une interprétation forte : juste en écoutant ce que les deux individus se disent – ou bien en examinant le procès-verbal de leur communication – on ne peut pas dire s'ils sont engagés dans un dialogue rationnel (dans le sens bayésien) ou pas : il n'y a rien dans la forme extérieure de ce qu'ils se disent qui nous permettrait de décider si ce qu'ils se disent est rationnel (dans le sens bayésien) ou pas.

La preuve donnée par Polemarchakis est constructive. Elle se sert de l'écriture matricielle des deux partitions d'information. L'exemple 8 illustre cette construction.

Exemple 8 – le problème inverse

Soit la suite de probabilités $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{1}{3}$, $q_3 = \frac{1}{4}$, $q_4 = \frac{1}{2}$, $q_5 = \frac{1}{2}$. On cherche un ensemble fondamental Ω, deux partitions de Ω, un événement $A \subset \Omega$ et un état $\omega^\star \in \Omega$ tels que si $\omega^\star$ se réalise, le processus de communication indirecte à la Geanakopolos et Polemarchakis laissera comme trace visible la suite des probabilités ci-dessus, sachant qu'à partir de la sixième étape les deux individus vont à toujours répéter $\frac{1}{2}$.

Suivant Polemarchakis, supposons que la partition fondue est la plus grossière et la partition croisée la plus fine ; c'est-à-dire, tout élément de notre matrice sera occupé par un sous-ensemble de Ω contenant un seul état. En outre nous supposons que tous les états ont a priori la même probabilité de se réaliser. A ce moment, nous ne savons pas encore combien d'états aura Ω ; d'autant moins que nous ne savons pas ce qui sera l'événement A. Ces deux éléments se décideront en fonction de notre construction.

En ce qui concerne la représentation – il s'agit là de notre construction – les états différents se distinguent tout simplement par leur emplacement dans la matrice. Un état est représenté par le symbole $\circ$ s'il n'appartient pas à l'événement A, et par $\bullet$ s'il appartient à l'événement A. Suivant Polemarchakis, nous supposons que l'état réalisé est celui au croisement de la première ligne et de la première colonne.

On commence par la fin. A la fin on veut que les deux individus disent 1/2. Voici une matrice qui satisfait cette condition :

$$
\begin{array}{cc|c}
\bullet & \circ & \frac{1}{2} \\
\circ & \bullet & \frac{1}{2} \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
1 \text{ dit : } q_5 = 1/2 \\
\hline
2 \text{ dit : } q_4 = 1/2
\end{array}
$$

C'est bien sûr – il le faut – une situation Aumannienne. Remarquons que notre construction n'est pas unique – ce qui ne gêne pas puisque nous chercherons à démontrer l'existence et non l'unicité d'un certain objet. Ensuite, on veut que l'individu 1, à l'avant-dernière étape, avant que le processus ne trouve sa fin avec les conditions d'Aumann, ait dit 1/4. Comment peut-on élargir la matrice pour arriver à cette fin ? Une possibilité est de rajouter tout simplement deux états n'appartenant pas à A (deux petits cercles vides) à chaque ligne :

$$
\begin{array}{cccc|c}
\bullet & \circ & \circ & \circ & \frac{1}{4} \\
\circ & \bullet & \circ & \circ & \frac{1}{4} \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
1 \text{ dit : } q_3 = 1/4
$$

Ensuite, on veut que l'individu 2, à l'étape précédente, ait dit 1/3. Voici une extension de la matrice qui fournit ce résultat :

$$
\begin{array}{cccc|c}
\bullet & \circ & \circ & \circ & \frac{1}{4} \\
\circ & \bullet & \circ & \circ & \frac{1}{4} \\
\circ & \circ & \bullet & \bullet & \frac{1}{2} \\
\hline
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} &
\end{array}
\qquad\qquad
2 \text{ dit : } q_2 = 1/3
$$

Et finalement on veut que tout ait commencé avec l'individu 1 qui dit 1/2. Voici une matrice qui le traduit :

$$
\begin{array}{cccccc|c}
\bullet & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \frac{1}{2} \\
\circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \frac{1}{2} \\
\circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \frac{1}{2} \\
\hline
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} &
\end{array}
\qquad\qquad
1 \text{ dit : } q_1 = 1/2
$$

Pour faire le test, il faut remonter le fil de l'argument ; il faut commencer avec la matrice tout en bas et appliquer l'algorithme de la communication indirecte.

4.5 La communication à travers les croyances – un phénomène réel ?

La vie réelle nous présente des situations qui sont assez proches d'un scénario de communication indirecte à travers les probabilités. Pensons à des débats sur des cas juridiques, des élections ou des récompenses : quelle est la chance que le suspect soit coupable ? Quelle est la chance que tel ou tel candidat va gagner ? Quelle est la chance qu'untel ou untel va recevoir tel ou tel prix ? Ou des débats dans des comités de recrutement ou de nomination : quelle est la chance qu'un certain candidat va accepter l'attribution d'une place dans une formation, d'un poste, ou d'une certaine récompense ?

En général, les participants d'un tel débat ont accès à des sources d'informations différentes, ce qui se traduit dans le modèle considéré par des partitions d'information différentes. Dans pas mal de ces scénarios, l'hypothèse que les partitions d'informations individuelles sont de connaissance commune parait assez juste. Si vous participez à un comité de sélection, vous connaissez les compétences de vos collègues et vos collègues connaissent les vôtres, et il ne semble pas déraisonnable de supposer que ces faits sont de connaissance commune.

Certes, dans de tels débats, les annonces sur les probabilités attribuées à un certain événement se font souvent sous une forme verbale plus ou moins approximative. On imagine très facilement quelqu'un dire :

« Je crois que K va gagner. »
« Je suis presque sûr qu'il est coupable. »
« Je ne pense pas qu'il va venir. »

De tels énoncés sont probablement interprétés, et entendus, dans un sens large qui revient, si on le traduit dans un modèle mathématique, à attribuer des intervalles de probabilité à l'événement en question. « Je crois que K va gagner », veut probablement dire attribuer une probabilité de plus de 50% à l'événement que K va gagner. (Plus de 70%, plus de 90% ? Cela dépend probablement du contexte.) Parfois on retrouve de telles quantifications dans la forme verbale même :

« A mon avis, K va gagner, avec 90%. »
« Je suis à 99% sûr qu'il est coupable. »
« Je suis à 99% sûr qu'il ne va pas venir. »

Nous verrons dans le chapitre suivant qu'un processus de communication indirecte à travers les probabilités a posteriori exprimées sous forme des inégalités « $q_i \geq q_i^\star$ » aura des propriétés similaires à celui basé sur les égalités « $q_i = q_i^\star$ », comme nous l'avons considéré jusqu'à présent.

D'autre part, il y a dans la vie réelle des situations dans lesquelles les individus ne se communiquent pas explicitement les probabilités a posteriori qu'ils attribuent à un certain événement mais dans lesquelles ils révèlent quand même de l'information sur la probabilité qu'ils attribuent à un certain événement – sans le vouloir peut-être – à travers leurs actes. Ce sera notre point de départ dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

La communication indirecte à travers les actes

Si un individu est prêt à payer 1 euro pour en gagner 2, si un certain candidat remporte une compétition (sachant qu'il perd l'euro investi si le candidat perd) c'est comme s'il disait devant tout le monde : « Selon mes informations, la probabilité que ce candidat va gagner est d'au moins 1/2. » Cette information va éventuellement permettre à un autre individu d'actualiser sa croyance par rapport aux chances de gagner de ce candidat. Dans le modèle étudié, une telle information va plus précisément permettre à un autre individu, qui a observé le pari du premier, d'écarter toute partie de l'ensemble fondamental figurant dans la partition d'information du premier qui conduit à une probabilité que ce candidat va gagner inférieure à 1/2. Si le deuxième individu est ensuite appelé à accepter oui ou non le même pari et s'il l'accepte, ceci étant observé par le premier, le premier, de son coté, va aussi éventuellement pouvoir écarter des parties de l'ensemble fondamental – toute partie de l'ensemble fondamental figurant dans la partition d'information du deuxième (induite par ce qui reste à cette étape de l'ensemble fondamental du départ) qui conduit à une probabilité que ce candidat va gagner inférieure à 1/2 ; et ainsi de suite. Un tel échange d'information à travers les actes revient alors à un échange d'information sur la probabilité a posteriori attribuée à un événement sous forme d'une inégalité $q \geq q^{\star}$, comme nous l'avons évoqué à la fin du chapitre précédent.

Sebenius et Geanakoplos (1983) étudient un tel processus de communication indirecte à travers un pari entre deux personnes où ce que l'un gagne est ce que l'autre perd. Ils montre qu'un tel processus va, dans un nombre fini d'étapes, amener à une situation où l'un des deux refusera le pari.

Milgrom et Stocky (1982) étudient un processus similaire dans des marchés.

Exemple 8

Voici un processus de communication à travers un pari – un exemple pour illustrer le processus étudié par Sebenius et Geanakoplos (1983) : il y a deux individus dont les informations concernant une certaine expérience et un certain événement A (qui peut se produire lors de cette expérience) sont données par les partitions d'informations représentées par la matrice donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc|c}
\{\mathbf{a}^\star,\mathbf{b},\mathbf{c},d\} & \{e,f,g,h\} & \{\mathbf{i},\mathbf{j}\} & \{\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n}\} & \frac{10}{14} \\
\{o,p,q,r\} & \{\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{u},v\} & \{w,x,y,z\} & \{a',b'\} & \frac{4}{14} \\
\hline
\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{6} & \frac{4}{6} &
\end{array}$$

La partition d'information de l'individu 1 est représentée par les lignes de la matrice ; celle de l'individu 2, par les colonnes. Tous les états ont la même probabilité de se produire. Le pari est le suivant : si l'événement A se réalise, l'individu 1 paie à l'individu 2 un euro ; si A ne se réalise pas, l'individu 2 paie à l'individu 1 un euro. Ainsi l'individu 1 aura intérêt à accepter le pari seulement si la probabilité qu'elle attribue à A est au moins de $1/2$; et l'individu 2 aura intérêt à accepter le pari seulement si la probabilité qu'il attribue à A est au plus de $1/2$.

Si on demande d'abord à l'individu 1 si elle veux prendre le pari, elle dira oui (puisqu'elle attribue à l'événement A une probabilité a posteriori de $10/14$). Si tout cela se passe devant l'individu 2, la réponse de l'individu 1 aura pour effet de réduire l'ensemble fondamental et les partitions induites sur ce nouvel ensemble fondamental à la matrice suivante :

$$\begin{array}{cccc|c}
\{\mathbf{a}^\star,\mathbf{b},\mathbf{c},d\} & \{e,f,g,h\} & \{\mathbf{i},\mathbf{j}\} & \{\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n}\} & \frac{10}{14} \\
\hline
\frac{3}{4} & 0 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Si ensuite on demande à l'individu 2, il va refuser le pari, puisqu'il attribuera à l'événement A une probabilité de $3/4$. Pourvu que ça se passe devant l'individu 1, il sera ensuite de connaissance commune entre les deux individus que l'état réalisé ne peut pas se trouver dans $\{e,f,g,h\}$ et donc *ne peut pas se trouver pas en dehors* de ce qui reste de l'ensemble fondamental à cette étape, $\{a,b,c,d,i,j,k,l,m,n\}$, avec les partitions d'informations induites sur cet ensemble comme suit :

$$\begin{array}{ccc|c}
\{\mathbf{a}^\star,\mathbf{b},\mathbf{c},d\} & \{\mathbf{i},\mathbf{j}\} & \{\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n}\} & \frac{9}{10} \\
\hline
\frac{3}{4} & 1 & 1 &
\end{array}$$

A la fin du processus, il est de connaissance commune entre les deux individus que l'individu 1 attribue à A une probabilité a posteriori de $9/10$ et que l'individu 2 attribue à A une probabilité a posteriori soit de $3/4$ soit de 1, ce qui implique, entre autres, qu'il est de connaissance commune entre les deux que les deux attribuent à A une probabilité a posteriori d'au moins $3/4$.

5.1 L'ordre joue un rôle également

La dépendance du processus de l'ordre, on la retrouve aussi dans la communication indirecte à travers les actes.

Exemple 8 – suite 1

Si on demande d'abord à l'individu 2 s'il veut prendre ce pari, il dira oui (puisqu'il attribue à l'événement A une probabilité a posteriori de $3/8$, ce qui est inférieur à $1/2$). Si tout cela se passe devant l'individu 1, la réponse de l'individu 2 aura l'effet de réduire l'ensemble fondamental et les partitions induites par ce nouvel ensemble fondamental à la matrice suivante :

$$
\begin{array}{ccc|c}
\{\mathbf{a}^\star, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\} & \{e, f, g, h\} & \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} & \frac{5}{10} \\
\{o, p, q, r\} & \{\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, v\} & \{w, x, y, z\} & \frac{3}{12} \\
\hline
\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{6} &
\end{array}
$$

Si ensuite on demande – encore une fois devant l'autre – à l'individu 1, c'est possible qu'elle accepte (puisqu'elle attribuera à l'événement A une probabilité a posteriori toujours de $1/2$). Imaginons qu'elle accepte. Sa réponse aura l'effet de réduire la matrice à la matrice suivante :

$$
\begin{array}{ccc|c}
\{\mathbf{a}^\star, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\} & \{e, f, g, h\} & \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} & \frac{5}{10} \\
\hline
\frac{3}{4} & 0 & 1 &
\end{array}
$$

A ce moment, l'individu 2 refusera la pari, et il sera de connaissance commune entre les deux que l'état réalisé ne peut pas se trouver en dehors de $\{a, b, c, d, i, j\}$ avec les partitions d'informations induites par ce nouvel ensemble fondamental comme suit :

$$
\begin{array}{cc|c}
\{\mathbf{a}^\star, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\} & \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} & \frac{5}{6} \\
\hline
\frac{3}{4} & 1 &
\end{array}
$$

A la fin du processus, il sera de connaissance commune entre les deux que l'individu 1 attribue à A une probabilité a posteriori de $5/6$ et que l'individu 2 attribue à A une probabilité a posteriori soit de $3/4$ soit de 1, ce qui implique entre autres, qu'il est de connaissance commune entre les deux qu'ils attribuent les deux à A une probabilité a posteriori d'au moins $3/4$.

5.2 La communication à travers les actes n'est pas forcement « moins puissante » que la communication des probabilités actualisées

L'exemple 8 nous conduit à une autre observation : la communication à travers les actes, ou bien à travers des annonces portant sur les probabilités actualisées sous forme d'inégalités, n'est pas forcement « moins puissante » que la communication de la valeur exacte des probabilités actualisées. Il se peut que la communication à travers les actes réduit l'ensemble fondamental à un ensemble plus petit que la communication exacte des probabilités actualisées. Voyons-le plus précisément.

Exemple 8 – suite 2

Si les individus se communiquent tour à tour la valeur exacte de leurs probabilités actualisées concernant l'événement A (selon le processus de communication indirecte défini par Geanakoplos et Polemarchakis 1982) et si c'est individu 2 qui commence et annonce 3/8, l'ensemble fondamental se réduit d'un coup à :

$$\begin{array}{cc|c} \{\mathbf{a}^\star, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\} & \{e, f, g, h\} & \frac{3}{8} \\ \{o, p, q, r\} & \{\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, v\} & \frac{3}{8} \\ \hline \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \end{array}$$

Sur cet ensemble, les conditions d'Aumann (équation 7) sont satisfaites, et alors le processus s'arrête après cette première étape.

L'exemple nous montre alors que la communication indirecte à travers les actes selon le protocole étudié par Sebenius et Geanakoplos (qui revient à une communication indirecte à travers des annonces portant sur les probabilités actualisées sous forme *d'inégalités*) peut conduire à des probabilités actualisées d'un l'événement A « plus proche » à la vraie valeur de vérité de l'événement A (qui est soit 1 soit 0) que le processus de la communication indirecte à travers les probabilités actualisées sous forme *d'égalités* comme étudié par Geanakoplos et Polemarchakis.

Comparant les deux processus dans l'exemple 8 (sous le même ordre) on comprend facilement la raison pour ce phénomène éventuellement contre-intuitif : ni l'un ni l'autre processus est monotone, dans le sens qu'éliminer moins d'états à l'étape n, permets éventuellement d'éliminer plus d'états à l'étape $n + 1$. Plus particulièrement, éliminer moins d'états à l'étape n peut éviter une situation Aumannienne à l'étape $n + 1$ et peut alors éviter que le processus s'arrête.

Pour être complèt, remarquons que si c'est l'individu 1 qui commence le processus de communication indirecte à travers les valeurs exactes des probabilités, les individus arriveront, après deux étapes, à :

$$\begin{array}{c|c} \{\mathbf{a}^{\star}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d\} & \frac{3}{4} \\ \hline \frac{3}{4} & \end{array},$$

ce qui met en évidence, encore une fois, que la communication indirecte à travers les probabilités actualisées dépend de l'ordre.

Chapitre 6

Relation avec des théories sur le langage

6.1 Les énigmes – le phénomène de la connaissance commune sous forme narrative

Avant Lewis et Aumann, le phénomène de la connaissance commune a d'abord été étudié sous forme narrative à travers des « énigmes ». La plus connue de ces énigmes est souvent raconté sous le titre *L'énigme des Trois Chapeaux*.

L'énigme des Trois Chapeaux est souvent raconté sous une forme qui ressemble à l'histoire suivante : la maîtresse d'une classe demande à trois élèves de se prêter à une expérience. Elle positionne à la tête de chacune des trois élèves un chapeau sans que l'élève en question puisse voir la couleur de son chapeau. Mais chacune des trois élèves peut voir la couleur du chapeau des deux autres. Chacun des élèves voit que les deux autres portent un chapeau rouge. La maîtresse explique qu'a priori, il y a des chapeaux rouges et des chapeaux blancs et elle annonce qu'il y a au mois l'une des trois élèves qui porte un chapeau rouge. Ensuite elle demande tour à tour aux élèves si elles connaissent la couleur de leur chapeau. La première dit non, la deuxième dit non. La troisième dit oui, elle connaît la couleur de son chapeau : rouge. *Pourquoi ?* La solution de cette énigme s'effectue selon un raisonnement comme celui qui s'applique dans les dialogues décrits par Geanakopolos et Polemarchakis, sauf qu'il y a trois et non seulement deux individus. Pour des présentations plus détaillées de l'énigme des *Trois Chapeaux*, notamment sa modélisation avec des partitions d'information, voir Ménager (2006) et Billot (2007).

La mention la plus ancienne de cet exemple, dont nous avons trouvé la référence, se trouve dans un article de Jaques Lacan (1945) dans une version avec trois prisonniers qui ont chacun un disque, de couleur noir ou blanc, attaché au dos (voir Billot 2007). L'exemple parait aussi chez Littlewood (1953, 3) dans une version avec trois dames dans un compartiment de train qui ont toutes un visage sale. Littlewood, et dans cet aspect sa présentation est plus générale que celle de Lacan, donne aussi l'extension de l'exemple avec n dames qui ont toutes un visage sale. La première présentation utilisant explicitement un modèle d'états du monde est, d'après nos connaissances, due à Fagin, Halpern, Moses et Vardi (1988) ; voir aussi Geanakopolos (1992).

6.2 Lacan – la théorie de la psychanalyse

Chez Lacan, l'énigme apparaît à une différence près par rapport à la version avec les trois chapeaux donnée ci-dessus : il n'y a pas de structure temporelle discrète comme celle imposée par le fait que la maîtresse demande tour à tour aux élèves. Chez Lacan, le directeur de la prison, au début de l'expérience, annonce aux trois prisonniers que celui d'entre eux qui connaîtra en premier la couleur du disque attaché à son dos sera libéré. Ceci pose une difficulté supplémentaire : c'est la pensée qui doit structurer le temps et c'est dans cet optique-là que Lacan s'intéresse à ce problème. Deuxièmement, mais c'est moins important, chez Lacan ce n'est pas par un acte de parole du directeur de la prison que les trois prisonniers apprennent qu'il y a au moins l'un d'entre eux qui porte un disque noir mais par connaissance du fait qu'il y a en tout trois disques noirs et seulement deux disques blancs.

Chez Littlewood le récit apparaît également sans structure temporelle discrète imposée par les règles du jeu. Chez Littlewood, il n'y a effectivement pas de jeu avec des règles explicites : tout le dilemme se passe uniquement à l'intérieur de chaque personne, au niveau du croisement des pensées : chacune des trois dames voit que les deux autres ont un visage sale et chacune éclate de rire. Mais passé ce moment d'agitation, toutes trois deviennent d'un seul coup gravement silencieuses : voyant les deux autres éclater de rire, chacune comprend qu'elle aussi doit avoir le visage sale, puisque, dans le cas contraire, seule l'une des deux aurait à rire. Ce qui sépare ces deux moments – le moment d'exaltation et le moment de gêne – c'est juste le temps nécessaire pour faire ce raisonnement.

Dans l'énigme des trois chapeaux comme relatée ici avec sa structure temporelle discrète (que l'on prolonge étroitement à n chapeaux), jusqu'à l'avant-dernière étape, à la surface des choses, il ne se passe « rien » dans le sens que la même réponse est répétée :

$$\underbrace{\text{« non (je ne connais pas la couleur de mon chapeau) »}, \ldots, \text{« non »}}_{n-1 \text{ fois}}, \text{« oui »}.$$

Sous la forme narrative avec les trois prisonniers donnée par Lacan, respectivement celle avec les trois dames dans le compartiment de train donnée par Littlewood, cette propriété n'apparaît pas explicitement puisque le temps n'a pas de structure discrète.

Remarquons également que sous la forme narrative avec la structure temporelle discrète, le processus est déclenché par un acte de paroles publique qui revient à porter au niveau d'une connaissance commune un fait dont tout le monde a déjà connaissance individuellement : l'annonce de la maîtresse qu'il y a au moins un chapeau rouge. Là encore, cette propriété se perd dans la version narrative donnée par Lacan. Certainement, cette fonction peut-elle être facilement rétablie : il suffit de changer l'histoire en sorte que le directeur de la prison annonce qu'il y a au moins un disque noir (au lieu de montrer auparavant aux trois prisonniers qu'il y a en tout trois disques noirs et deux disques blancs). Toutefois, cette petite différence dans l'histoire, on peut spéculer, n'a pas permis à Lacan de remarquer ce détail intéressant : qu'on a ici un modèle formel (purement logique) qui décrit une situation où *dire une chose que tout le monde sait déjà* change de manière significative le dénouement de l'histoire puisque *dire* cette chose (la prononcer) la rendra de connaissance commune.

L'étude des dialogues à travers les croyances a peut-être un potentiel d'interprétation dans la théorie de la psychanalyse au delà de cette observation. Nous pensons notamment à deux aspects : (1) la répétition – ici la répétition de la même probabilité actualisée, attribuée à un événement, et (2) le résultat de Polemarchakis (2016) portant sur le fait que toute suite de croyances peut provenir d'un dialogue bayésien.

(1) La répétition : comme nous l'avons déjà observé, dans le modèle de la communication indirecte à travers les croyances (Geanakoplos et Polemarchakis 1982), répéter le même énoncé, ici la même valeur de probabilité attribuée a posteriori à un certain événement, ne veut pas forcément dire que l'individu qui se trouve dans cette répétition – le sujet, pour le dire dans le langage de la psychanalyse – n'apprenne rien. Il apprend. Il se trouve juste que ce qu'il apprend ne se manifeste pas dans un changement de la croyance apportée à l'événement en question, c'est-à-dire la forme « extérieure » à travers laquelle se fait l'échange de l'information dans le scénario considéré, mais uniquement dans ce qui se passe dans le fond : la réduction de l'ensemble de tous les états qui ne peuvent pas être rejetés en connaissance commune. Ceci montre que la répétition n'est pas forcement en vain. Un individu qui répète n'est pas forcement irrationnel ; il se peut que c'est un individu qui est toujours en train d'effectuer – non sans progression – un travail de réduction (de clarification si on veut) qui n'a pas encore trouvé sa fin.

(2) Le résultat de Polemarchakis (2016) portant sur le fait que toute suite de croyances peut provenir d'un dialogue bayésien généralise en effet l'observation précédente : non seulement la répétition de la même croyance, de la même valeur de probabilité attribuée à un événement, peut être rationnelle, mais il n'y a *aucune régularité* qui s'impose à la suite des croyances échangées au cours d'un dialogue bayésien. Ce qui parait éventuellement incohérent à la surface, par exemple, parce que les probabilités actualisées montent et descendent, n'est pas forcement irrationnel ; il se peut qu'il y ait une parfaite logique (bayésienne) derrière.

6.3 Le fond de la connaissance commune – le fond commun

Ce que nous appelons ici le *fond de la connaissance commune* et notons par $\Omega(n)$, l'ensemble des états du monde dont il n'est pas devenu de connaissance commune à l'étape n qu'ils ne peuvent pas être l'état réalisé, est à distinguer de *ce qui est de connaissance commune* à l'étape n.

Etant donné $\Omega(n)$ et les partitions d'information induites par $\Omega(n)$, $\mathscr{P}_{1,\Omega(n)}$ et $\mathscr{P}_{2,\Omega(n)}$, c'est-à-dire les partitions d'information dont on a enlevé les états qui n'appartiennent pas à $\Omega(n)$, on peut bien sûr déterminer la partition fondue à l'étape n :

$$\hat{\mathscr{P}}_{\Omega(n)} = \mathscr{P}_{1,\Omega(n)} \wedge \mathscr{P}_{2,\Omega(n)}.$$

Les événements qui sont de connaissance commune à l'état ω sont tous les événements A tels que

$$\hat{P}_{\Omega(n)}(\omega) \subset A,$$

sachant que $\hat{P}_{\Omega(n)}(\omega)$ est la classe de la partition fondue à l'étape n contenant ω.

Dans ce sens-là, $\Omega(n)$ est véritablement *le fond de la connaissance commune* : c'est le fondement, le socle, sur lequel s'édifie, à l'étape n du processus de communication indirecte, tout ce qui est de connaissance commune à cette étape : à partir duquel tous les événements dont il est désormais devenu de connaissance commune qu'ils se sont réalisé (toutes les phrases dont on sait désormais qu'elles sont vraies) peuvent être construits.

Nous proposons d'identifier $\Omega(n)$ avec ce que l'on appelle en linguistique le *fond commun* (the *common ground*) ou aussi *l'ensemble de contexte* (the *context set*) : l'ensemble des états du monde possibles dont tout le monde suppose d'être le contexte de se qui est communiqué (voir, par exemple, Stalnaker 2002).

6.4 Existe-t-il toujours une « croyance commune » ?

Faisons la distinction suivante : étant donné une partition d'information $\mathscr{P}$:

— *connaissance* d'un événement E à l'état ω veut dire que la classe de la partition contenant ω est inclus dans E : $P(\omega) \subset E$;

— une *croyance* par rapport à un événement $E \subset \Omega$ est une probabilité attribuée à cet événement E à l'état ω étant donné l'information apportée par la partition : $p(E \mid P(\omega))$.

Dans cette terminologie-là, connaissance d'un événement veut tout simplement dire lui attribuer une probabilité de 1.

Nous savons déjà ce que sont les événements qui sont de *connaissance commune* dans le modèle d'Aumann : tous les événements sous-ensemble de la classe de la partition fondue à laquelle appartient le vrai état – tous les $E \subset \Omega$ tels que $\hat{P}(\omega) = P_1 \wedge P_2\,(\omega) \subset E$. Mais qu'est-ce qu'une *croyance commune* ?

Le théorème d'Aumann peut être interprété comme un théorème d'existence pour une croyance commune. Il nous dit que si jamais il est de connaissance commune que l'individu 1, après avoir exploité l'information apportée par sa partition d'information, estime que la probabilité de E est de q_1 et que l'individu 2, après avoir exploité l'information apportée par sa partition d'information, estime que la probabilité de E est de q_2 – en d'autres mots si leurs croyances a posteriori sont de connaissance commune – alors elles sont égales : $q_1 = q = q_2$. Le théorème implique (voir l'équation 7) que cette *croyance partagée en connaissance commune* est aussi celle apportée par la partition fondue $\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2$:

$$q_1 = q_2 = q_{\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2} = p(E \mid P_1 \wedge P_2(\omega)).$$

Or, indépendamment du fait que les croyances actualisées des individus sont de connaissance commune ou pas, *on peut toujours calculer la probabilité actualisée apportée par la partition fondue*,

$$q_{\mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2} = p(E \mid P_1 \wedge P_2(\omega)).$$

Mais que représente cette probabilité ? Peut-elle, dans un certain sens, toujours être interprétée comme la *croyance commune* des deux individus ?

Une réponse se dessine à partir de la définition du processus de communication indirecte donnée dans le chapitre 4 : après que les individus ont reçu leurs informations selon leurs partitions d'information individuelles, pourvu que le fait que c'est ce qui s'est passé est de connaissance commune, $\hat{P}(\omega) = P_1 \wedge P_2\,(\omega)$ joue le rôle d'un nouvel ensemble fondamental dont il est désormais de connaissance commune entre les deux individus que le vrai état du monde ne peut pas se trouver en dehors. La probabilité d'un événement A sachant $\hat{P}(\omega)$, $P(A \mid \hat{P}(\omega))$ joue alors le rôle d'une nouvelle probabilité a priori de A ; une sorte de probabilité actualisée intermédiaire : la probabilité de A avant que les individus ont pris en compte les informations individuelles apportées par leurs partitions individuelles *qui vont au delà de ce qui est de connaissance commune entre les deux grâce à la connaissance commune de leurs partitions d'information individuelles.*

Chapitre 7

Appendice : D'où viennent les partitions ?

7.1 Opérateurs de connaissance

Dans l'approche Aumannienne (1976), on peut considérer que le fait qu'un individu i a connaissance d'un événement E à l'état ω, ce qui est la cas si $P_i(\omega) \subset E$, est lui-même un événement, ce que l'on peut noter $K_iE(\omega)$. L'opérateur K_i, auquel on se réfère alors comme un *opérateur de connaissance*, peut être emboîté, donnant des expressions comme, par exemple, $K_jK_iE(\omega)$, ce qui signifie qu'à l'état ω, l'individu j sait que i sait que E s'est réalisé. Certes, le cadre formel basé sur les partitions d'information, employé par Aumann (1976), implique certaines propriétés d'un tel opérateur. Inversement, on peut prendre un tel opérateur de connaissance comme point de départ. Cette approche permet, d'un côté, de poser la question quels sont les axiomes qu'un tel opérateur doit satisfaire pour qu'il peut être représenté par une partition d'information, donnant un fondement axiomatique de l'approche basée sur les partitions d'information ; de l'autre côté, elle permet d'élargir le modèle en retenant des propriétés d'un tel opérateur différentes de celles implicitement retenues par l'approche basée sur les partitions d'informations (Bacherach 1985 ; voir aussi Fagin et al. 1995 [1988], Aumann 1999a et Aumann et Heifetz 2002.)

Dans ce livre, je n'emploie pas un tel opérateur de connaissance, puisque l'étude des dialogues – si on reste dans le modèle standard d'Aumann – se présente, à mon avis, plus facilement dans le langage des partition, et je ne cherche pas à explorer ou modifier les bases épistémiques de ce modèle. [1]

1. Plus sur les opérateurs de connaissance dans des articles en langue française se trouve chez Lismont (1994) et les articles de synthèse de Ménager (2006) et Billot (2007).

7.2 L'approche *sémantique* versus l'approche *syntactique*

L'approche prise par Aumann dans « Agreeing to disagree » (1976) de bâtir un modèle des connaissances des individus – et d'en déduire une notion de la connaissance commune – basé sur la notion d'un état du monde est sérieusement efficace. Mais cette efficacité vient à un prix : la notion d'un état du monde devient une sorte de boîte noire dans laquelle disparaît tout détail, tout aspect qui peut intéresser dans un état du monde et que les gens normalement expriment par des mots, des phrases.

Les modèles de connaissance qui s'édifient sur un ensemble d'états du monde possibles sont souvent qualifiés de *sémantique* – par contraste à des approches *syntactiques*, qui prennent comme point de départs des propositions, des phrases, dont un individu sait quelles sont vraies et qui étudient ce qu'il s'en suit si on impose certaines règles (logiques) qui doivent être respectées entres ces phrases (Hintikka 1962).

Roland Fagin, Joseph Halpern, Yoram Moses et Moshe Vardi (Halpern et Moses 1984, 1985, Fagin, Halpern et Vardi 1985, Fagin et al. 1995 [1988]), Luc Lismont et Philippe Mogin (1994) se sont intéressés à la question comment les deux approches communiquent. Dov Samet (1990) montre sous quelles conditions le théorème d'Aumann (1976) peut être retrouvé dans un formalisme syntactique.

Aumann (1999a) lui-même a étendu ses recherches dans cette voie. Il s'est plus précisément intéressé à la question à quel dégrée un système de règles syntactiques (basé sur des opérateurs logiques) donne un fondement pour l'approche sémantique et il a montré que ceci est seulement partiellement le cas : pas tous les événements qui peuvent être retenus dans un modèle basé sur un ensemble d'états du monde possibles (et dans cette approche, un événement est tout simplement un sous-ensemble de l'ensemble de tous les états du monde possibles) correspondent à une phrase admissible selon les règles syntactiques.

7.3 Des partitions d'informations engendrées par des signaux

Chez Aumann (1976), aussi bien que chez les auteurs qui étudient les scénarios de communication dans la tradition Aumannienne (Geanakoplos et Polemarchakis 1982, Sebenius et Geanakoplos 1983), les partitions d'information des individus sont tout simplement données ; elles font partie de ce qui constitue l'état du monde. On peut, toutefois, tenter d'en donner un fondement, une explication, une *histoire* si on veut. [2]

2. Nous ne parlerons même pas de la question encore plus profonde : *Qu'est-ce qu'un état du monde* ? Pour cette discussion voir, par exemple, Aumann (1999a).

Un signal

Une explication possible est que les individus reçoivent un *signal*. Mathématiquement un signal peut s'exprimer par une application qui associe à chaque état $\omega \in \Omega$ un signal S appartenant à un ensemble de signaux :

$$S^i : \Omega \to \mathscr{S}^i, \quad \mathscr{S}^i = \{S_1^i, S_2^i, \ldots, S_N^i\}.$$

Pourvu que l'ensemble des signaux $\mathscr{S}^i$ est fini, ce que nous supposons, une telle application engendre une partition de Ω : cette partition engendrée par S^i sera la partition d'information de l'individu i.

Un signal mélangé

Qu'est-ce qui se passe si un tel signal n'est pas pur, c'est-à-dire si les individus ne reçoivent pas de manière sûre un signal en fonction de l'état réalisé, mais si les individus reçoivent un signal selon une certaine loi de probabilité ? Mathématiquement cela revient à remplacer l'ensemble de signaux $\mathscr{S}^i$ par l'ensemble des lois de probabilité sur $\mathscr{S}^i$, le simplex $\Delta(\mathscr{S}^i)$:

$$S : \Omega \to \Delta(\mathscr{S}), \quad \Delta(\mathscr{S}) = \{(s_1, s_2, \ldots, s_N) : 0 \leq s_n \leq 1 \, \forall n \, \text{et} \, \sum_n s_n = 1\},$$

avec l'interprétation que $S(\omega) = s_1(\omega), s_2(\omega), \ldots, s_N(\omega)$ représente les probabilités avec lesquelles le signal relatif sera reçu lorsque ω se produit.

Dans une approche qui prend comme point de départ le concept d'un état du monde, de tels signaux peuvent – et devraient – être inclus dans ce qui constitue un état du monde. Par conséquent, un état du monde n'est plus simplement ω, mais ω plus les réalisations des fonctions de signaux S^1 et S^2 des deux individus : (ω, s^1, s^2). On aura alors un nouvel ensemble d'états du monde possibles $\Omega \times \mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$. Etant donné les fonctions de signaux S^1 et S^2, on peut bien sûr déterminer la probabilité de chaque événement $(\omega, s^1, s^2) \in \Omega \times S^1 \times S^2$, et, certes, les fonctions des signaux des individus S^1 et S^2 engendrent des partitions sur ce nouvel ensemble d'états du monde possible.

En résumé : si les fonctions de signaux S^1 et S^2 sont de connaissance commune entre les deux individus, on retombe dans le modèle Aumannien.

Bibliographie

[1] Aumann, Robert J. 1976. « Agreeing to Disagree ». *The Annals of Statistics* 4, 1236–1239.

[2] Aumann, Robert, J. 1999a. « Interactive epistemology I : knowledge ». *International Journal of Game Theory* 28, 263–300.

[3] Aumann, Robert, J. 1999b. « Interactive epistemology II : probability ». *International Journal of Game Theory* 28, 301–314.

[4] Aumann, Robert J. et Aviad Heifetz. 2002. « Incomplete information. » Dans : Aumann, R., Hart, S. (Eds.) *Handbook of Game Theory* (Vol. 3). Elsevier, Amsterdam/New York pp. 1665-1686.

[5] Bacharach, Michael. 1979. « Normal Bayesian dialogues. » *Journal of the American Statistical Association* 74, 837–846.

[6] Bacharach, Michael. 1985. « Some extensions of a claim of Aumann in an axiomatic model of knowledge. » *Journal of Economic Theory* 37, 167–90.

[7] Barbut M. 1968. « Partitions d'un ensemble fini : leur treillis (cosimplexe) et leur représentation géométrique ». *Mathématiques et Sciences Humaines* 22, 5–22.

[8] Billot, Antoine. 2007. « Le raisonement stratégique (Ce qu'Aumann doit à Lacan) ». Dans Bernard Walliser (Ed.) *Economie et Cognition*, Editions Ophrys, 115–146.

[9] Cave, Jonathan A. K. 1983. « Learning to agree. » *Economics Letters* 12, 147–52.

[10] Dalkey, Norman 1969. « The delphi method : an experimental study of group opinion ». *United States Air Force Project Rand* RM-5888-PR, 1–79.

[11] DeGroot, M. H. 1974. « Reaching a consensus ». *Journal of the American Statistical Association* 69, 118–121.

[12] Fagin Ronald, Joseph Y. Halpern, and Moshe Y. Vardi. 1984. « A model-theoretic analysis of knowledge ». *Proceedings of the 25th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 268–278.

[13] Fagin, Ronald and Moshe Y. Vardi. 1985, « An internal semantics for modal logic ». *Proceedings of the 17th ACM Symposium on Theory of Computing, Providence*, 305–315.

[14] Fagin, Ronald, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, et Moshe Y. Vardi. 1995. *Reasoning about Knowledge.* Cambridge, MA : MIT Press. (Publié dans une version préliminaire

d'abord comme « Reasoning about Knowledge », *Mimeo, IBM*, San Jose, California, 1988.)

[15] Geanakoplos, John. 1992. « Common knowledge ». *Journal of Economic Perspectives* 6 (4), 53–82.

[16] Geanakoplos, John et Herakles Polemarchakis. 1982. « We can't disagree forever ». *Journal of Economic Theory* 28, 192–200.

[17] Halpern, Joseph Y. and Yoram O. Moses. 1984, « Knowledge and common knowledge in a distributed environment ». in Proceedings of the 3rd ACM Conference on Principles of Distributed Computing, 50-61, New York. A revised and expanded version appeared in Journal of the Association for Computing Machinery 37, 549-587, 1990.

[18] Halpern, Joseph Y. and Yoram O. Moses. 1985, « A guide to the modal logic of knowledge ». *Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI- 85), New York* 480–490.

[19] Halpern, Joseph Y. and Yoram O. Moses. 1992, « A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief ». *Artificial Intelligence* 54, 319–379.

[20] Hintikka, Jaakko. 1962. *Knowledge and Belief.* Ithaca : Cornell University Press.

[21] Lacan, Jaques 1945. « Le temps logique et l'assertion de certitude anticipé : un nouveau sophisme ». *Les Cahiers d'Art, 1940–1944*, 32–42 ; repris dans les *Ecrits* (1966). Paris : Seuil.

[22] Lewis, David K. 1969. *Convention : A philosophical study.* Cambridge, MA : Cambridge University Press.

[23] Lismont, Luc. 1993. « La connaissance commue en logique modale ». *Mathematical Logic Quarterly* 39, 115–130.

[24] Lismont, Luc et Philippe Mogin. 1994. « On the logic of common belief and common knowledge ». *Theory and Decision* 37, 75–106.

[25] Littlewood, J. E. 1953. *A Mathematician's Miscellany*, London : Methuen & Co.

[26] Ménager, Lucie. 2006. « Connaissance commune et consensus ». *Revue d'Economie Industrielle* 114, 41–66.

[27] Milgrom, Paul. 1981. « An axiomatic characterization of common knowledge ». *Econometrica*, 49 (1), 219–222.

[28] Milgrom, Paul et Nancy Stokey. 1982. « Information, trade, and common knowledge ». *Journal of Economic Theory* 26 (1), 17–27.

[29] Monderer, Dov et Dov Samet. 1989. « Approximating common knowledge with common beliefs ». *Games and Economic Behavior* 1, 170–190.

[30] Morris, Stephen. 1999. « Approximate common knowledge revisited ». *International Journal of Game Theory* 28, 385–408.

[31] Morris, Stephen et Hyun Song Shin. 1997. « Approximate common knowledge and co-ordination : recent lessons from game theory ». *Journal of Logic, Language, and Information* 6, 171–190.

[32] Nielsen, Lars Tyge. 1984. « Common knowledge, communication, and convergence of beliefs ». *Mathematical Social Sciences* 8, 1–14.

[33] Polemarchakis, Herakles. 2016. « Rational dialogs ». Working Paper (February 2016)

[34] Rubinstein, Ariel. 1989. « The electronic mail game : strategic behaviour under 'almost common knowledge.' » *American Economic Review 79*, 385–91.

[35] Samet, Dov. 1990. « Ignoring ignorance and agreeing to disagree ». *Journal of Economic Theory* 52, 190–207.

[36] Savage L. 1954. *The Foundations of Statistics*, New York : Wiley.

[37] Sebenius, James K. and John Geanakoplos. 1983. « Don't bet on it : contingent agreements with asymmetric information ». *Journal of the American Statistical Association* 78 (382), 424–426.

[38] Stalnaker, Robert. 1968. « A theory of conditionals ». *Linguistics and Philosophy* 25 : 701–721.

[39] Stalnaker, Robert. 2002. « Common ground ». *Linguistics and Philosophy* 25, 701–721.

[40] Williams, David. 1991. « Probability with Martingales ». Cambridge, UK : Cambridge University Press.